

# Inhaltsverzeichnis

Aufstellen von Polynomfunktionen .....	1-2
Binomialkoeffizient .....	3-4
Binomialverteilung.....	5-6
Extrema .....	7-9
Berechnung von Extrema anhand der Differentialrechnung .....	10-12
Berechnung von Extremstellen in endlichen Intervallen .....	13-14
Funktionen und ihre zugehörige Ableitungsfunktion .....	15-17
Mittelwert, Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung .....	18-19
Monotonie .....	20-22
Polynomdivision.....	23-25
Relative Häufigkeit.....	26-27
Sattelpunkt .....	28-29
Skizzieren von Funktionen anhand der Ableitung.....	30
Untersuchung des Monotonieverhaltens einer Funktion.....	31-34
Wendepunkt .....	35-37
Zufallsvariable.....	38-39
Komplexe Zahlen: Allgemeines.....	40-42
Multiplikation komplexer Zahlen in Polardarstellung.....	43-44
Polardarstellung komplexer Zahlen.....	45-47
Geometrische Deutung komplexer Zahlen.....	48-49
Lösen quadratischer Gleichungen in $\mathbb{C}$ .....	50-52
Die imaginäre Einheit.....	53-54

## Aufstellen von Polynomfunktionen

### Theorie

Um über ein ausreichendes Vokabular zu verfügen, reichen wir nun den Begriff des **Hochpunktes** und des **Tiefpunktes** nach:

- Ein Hochpunkt einer Funktion  $f$  liegt mit  $(x|f(x))$  vor, wenn die Stelle  $x$  eine lokale Maximumsstelle von  $f$  ist.
- Ein Tiefpunkt einer Funktion  $f$  liegt mit  $(x|f(x))$  vor, wenn die Stelle  $x$  eine lokale Minimumsstelle von  $f$  ist.

Wir wollen nun einen umgekehrten Weg gehen und Funktionsgleichungen bestimmen. Dies erfolgt von gegebenen Informationen ausgehend. Beispielsweise könnten von einer Funktion Tiefpunkte bzw. Hochpunkte gegeben sein, oder Wendepunkte oder auch das Monotonieverhalten in einem bestimmten Punkt.

Wir starten abhängig vom Grad der Funktion mit der gesuchten Termdarstellung und verwenden für die Koeffizienten Variablen als Platzhalter. Als Beispiel sei hier die Termdarstellung von einer Funktion 4. Grades angegeben:  $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

Wir verwenden unsere Informationen und erhalten sodann ein Gleichungssystem. Wichtig ist, dass unser Gleichungssystem lösbar ist, also, dass die Anzahl der Gleichungen zumindest der Anzahl der Koeffizienten entspricht. Wenn das Gleichungssystem sodann lösbar ist, können wir alle Koeffizienten bestimmen und erhalten unsere gesuchte Funktionsgleichung.

### Beispiel

*Wir betrachten eine Polynomfunktion 3. Grades. Sie schneidet die y-Achse bei  $-6$  und hat an der Stelle  $3$  eine Nullstelle. Ferner sind die Stellen  $-1$  und  $1$  Extremstellen jener Funktion. Stelle die Polynomfunktion auf!*

Unsere gesuchte Polynomfunktion hat die Form:  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ . Daraus bestimmen wir die erste Ableitung mit  $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ . Wir stellen die Gleichungen auf:

1. Gleichung: Der Graph schneidet die y-Achse bei  $-6$ , dh.  $f(0) = -6$
2. Gleichung: Der Graph hat eine Nullstelle bei  $3$ , dh.  $f(3) = 0$
3. Gleichung: Der Graph hat eine Extremstelle bei  $-1$ , dh.  $f'(-1) = 0$
4. Gleichung: Der Graph hat eine Extremstelle bei  $1$ , dh.  $f'(1) = 0$

Was uns folgendes Gleichungssystem liefert:

$$\begin{aligned} I : d &= -6 \\ II : 27a + 9b + 3c + d &= 0 \\ III : 3a - 2b + c &= 0 \\ IV : 3a + 2b + c &= 0 \end{aligned}$$

Wir erhalten als Lösung des Systems:  $a = \frac{1}{3}$ ,  $b = 0$ ,  $c = -1$  und  $d = -6$ . Rechne selbst nach!

Die Funktionsgleichung lautet also:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x - 6$$

## Übungen

1. Eine Polynomfunktion 3. Grades verläuft durch den Punkt  $P(-1|9)$ , berührt die x-Achse bei  $x = 2$  und besitzt in  $E(1|1)$  einen Extremwert. Wie lautet die Gleichung dieser Funktion?
2. Durch einen Punkt  $P(2|4)$ , welcher auf einer Funktion  $f$  mit  $f(x) = ax^2 + bx + 5$  liegt, wird die Tangente  $t : -4x + 2y + 5 = 0$  gelegt. Berechne  $a$  und  $b$ !
3. Der Graph der Polynomfunktion  $f$  mit  $f(x) = ax^3 + bx$  besitzt bei  $P(1| -3)$  einen Tiefpunkt. Ermittle eine Termdarstellung der Funktion  $f$ !

## Quiz

[Zum Quiz](#)

## Binomialkoeffizient

### Theorie

Um mit dem Binomialkoeffizienten arbeiten zu können, müssen wir zuerst den Begriff der Fakultät einführen. Die Fakultät gibt an, auf wie viele verschiedene Arten eine Menge von  $n$  Elementen angeordnet werden kann. Wir schreiben sodann  $n!$  und formulieren dies formal folgendermaßen:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$$

Ferner gilt, dass  $0! = 1$  ist. Als Beispiel zu Fakultät betrachte Beispiel 1.

Kommen wir nun zum Binomialkoeffizienten. Er gibt an, wie viele Möglichkeiten es gibt,  $k$  Objekte aus einer Menge von  $n$  Objekten auszuwählen. Anders ausgedrückt ist der Binomialkoeffizient die Zahl der  $k$ -elementigen Teilmengen einer  $n$ -elementigen Menge. Der Binomialkoeffizient wird geschrieben als  $\binom{n}{k}$ .

Wir werden nun die Formel für den Binomialkoeffizienten mithilfe eines Beispiels erarbeiten. Wir wollen herausfinden, wie viele Möglichkeiten es gibt, aus einer Startaufstellung von 11 Spielern 5 für ein Elfmeterschießen auszuwählen.

Wir fragen uns zu Beginn, wie viele Möglichkeiten es gibt, Spieler für das Elfmeterschießen auszuwählen.

Wir finden folgende Rechnung:  $11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 55440$ . Die Überlegungen sind hier jenen der Fakultät ähnlich. Für den ersten Schützen haben wir 11 Spieler zur Auswahl, für den zweiten Schützen 10 Spieler, bis wir schließlich für den letzten Schützen 7 Spieler zur Auswahl haben.

Wir sind an dieser Stelle allerdings noch nicht fertig, da die Reihenfolge wie wir die Spieler zum Schießen schicken für uns irrelevant ist. Wir wollen an dieser Stelle nur wissen, wie viele Möglichkeiten es gibt 5 Spieler auszuwählen.

Damit wir die unterschiedlichen Anordnungen loswerden, müssen wir berechnen, wie viele Möglichkeiten wir haben die 5 Elfmeterschützen anzuordnen.

Wir verwenden dazu folgende Rechnung:  $5! = 120$ .

Um nun die tatsächlich gewünschte Anzahl zu erhalten, müssen wir die oben gefundene Anzahl an Möglichkeiten durch 120 dividieren:  $\frac{55440}{120} = 462$ . Der Trainer hat also 462 Auswahlmöglichkeiten.

Versuchen wir diese Überlegungen nun allgemein zu verwenden, gelangen wir zur folgenden Formel:

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot 1}$$

Im Zähler finden wir unsere Gesamtanzahl an Möglichkeiten, im Nenner die Anzahl der Kombinationen der ausgewählten Elemente. Da diese Schreibweise im allgemeinen Kontext eher unpraktisch ist, erweitern wir den Bruch mit  $(n-k)!$  und erhalten:

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1) \cdot (n-k)!}{k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot 1 \cdot (n-k)!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Jene Schreibweise ist eher gebräuchlich. Wir halten fest:

**Definition**

Sind  $n, k \in \mathbb{N}$  und  $k \leq n$ , so gilt  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ . Ferner gelten  $\binom{n}{0} = 1$ ,  $\binom{0}{0} = 1$  und  $\binom{n}{n} = 1$ . Wir bezeichnen  $\binom{n}{k}$  als Binomialkoeffizienten.

**Beispiele****Beispiel 1**

Ein Schüler besitzt 6 Videospiele. Er fragt sich, wie viele Möglichkeiten es gibt diese 6 Spiele in seinem Regal nebeneinander einzuordnen.

Wir berechnen wie folgt:

$$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$

Es gibt also 720 Möglichkeiten die Videospiele anzuordnen. Zu Erläuterung der Formel: Zu Beginn haben wir noch 6 Videospiele zu Auswahl, danach noch 5 usw., bis wir am Schluss noch genau ein Videospiele zur Verfügung haben.

**Beispiel 2**

An einem Tennisturnier nehmen 8 Spielerinnen teil. Für das Finalspiel qualifizieren sich 2 Spielerinnen. Wie viele mögliche Finalpaarungen gibt es?

$$\binom{8}{2} = \frac{8!}{2! \cdot (8-2)!} = 28$$

Es gibt also 28 mögliche Finalpaarungen.

**Übung**

Für eine Prüfung werden vom Lehrer zu Beginn jeder Stunde 4 Schülerinnen bzw. Schüler ausgewählt. In der Klasse befinden sich 12 Schülerinnen bzw. Schüler. Wie viele Möglichkeiten hat der Lehrer diese Auswahl zu treffen?

## Binomialverteilung

### Theorie

Ausgangspunkt für die Binomialverteilung ist ein sogenanntes Bernoulli-Experiment. Dieses Experiment wird  $n$ -mal durchgeführt. Es zeichnet sich dadurch aus, dass es zwei Ausgänge besitzt und, dass jeder Versuchsdurchgang unter den gleichen Bedingungen durchgeführt wird. Bei jedem Durchgang tritt ein bestimmtes Ereignis  $E$  mit einer Wahrscheinlichkeit  $p$  ein bzw. mit einer Wahrscheinlichkeit von  $(1 - p)$  nicht ein.

In der Regel sind wir daran interessiert, wie oft ein Ereignis  $E$  bei  $n$  Versuchsdurchführungen eintritt. Wir erhalten folgende Formel:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

Sie beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl  $X$  der eintretenden Ereignisse genau  $k$  ist. Mit jener Formel kann man also die Wahrscheinlichkeit errechnen, dass bei  $n$  Durchführungen eines Versuchs das Ereignis genau  $k$ -mal eintritt und  $(n - k)$ -mal nicht eintritt. Es gilt  $0 \leq k \leq n$ , wobei  $k \in \mathbb{N}$ . Ferner muss für die Erfolgswahrscheinlichkeit  $p$  gelten, dass  $0 \leq p \leq 1$  ist.

Häufig sind wir jedoch nicht genau an einem Fall  $P(X = k)$  interessiert. Es kann beispielsweise auch die Wahrscheinlichkeit von  $P(X \leq k)$  oder  $P(X \geq k)$  von gesucht sein. In einem solchen Kontext gilt es oft mit Gegenwahrscheinlichkeiten zu arbeiten. Siehe dazu das unten angeführte Beispiel. Theoretisch gilt Folgendes:

$$\begin{aligned} P(X \leq k) &= P(X = 0) + P(X = 1) + \dots + P(X = k) \\ P(X < k) &= P(X = 0) + P(X = 1) + \dots + P(X = k - 1) \\ P(X \geq k) &= P(X = k) + P(X = k + 1) + \dots + P(X = n) \\ P(X > k) &= P(X = k + 1) + P(X = k + 2) + \dots + P(X = n) \end{aligned}$$

Unter Zuhilfenahme der Gegenwahrscheinlichkeit gilt außerdem:

$$\begin{aligned} P(X \leq k) &= 1 - P(X > k) \\ P(X < k) &= 1 - P(X \geq k) \\ P(X \geq k) &= 1 - P(X < k) \\ P(X > k) &= 1 - P(X \leq k) \end{aligned}$$

### Erwartungswert und Varianz

Der Erwartungswert und die Varianz sind im Kontext der Binomialverteilung wie folgt zu berechnen:

$$\begin{aligned} \mu &= n \cdot p \\ \sigma^2 &= n \cdot p \cdot (1 - p) \end{aligned}$$

### Beispiel

Erfahrungsgemäß erscheinen rund 5% der Fluggäste die Plätze reservieren lassen nicht zu ihrem Flug. Fluglinien nutzen dies aus und überbuchen ihre Flüge. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass die Taktik der Fluglinie gut geht, wenn bei einer Maschine welche 140 Passagieren Platz bietet 145 Tickets verkauft werden. Berechne ferner den Erwartungswert und die Varianz.

Wir wenden jetzt etwas Geschick an und berechnen:

$$P(X \geq 141) = \binom{145}{141} \cdot 0,95^{141} \cdot (1-0,95)^{141} + \dots + \binom{145}{145} \cdot 0,95^{145} \cdot (1-0,95)^{145} = 0,1446$$

Der Flug ist also mit einer Wahrscheinlichkeit von 14,46% überbucht. Das war allerdings nicht gefragt. Hier haben wir errechnet, wie wahrscheinlich es ist, dass die Taktik der Fluggesellschaft schief geht. Die Wahrscheinlichkeit, dass sie funktioniert errechnet sich also aus der Gegenwahrscheinlichkeit mit

$$P(X \leq 140) = P(X < 141) = 1 - P(X \geq 141) = 1 - 0,1446 = 0,8554$$

Die Taktik der Fluglinie geht also zu 85,54% auf. Wir hätten  $P(X \leq 140)$  auch direkt berechnen können. Dies hätte uns allerdings weitaus mehr Zeit gekostet.

Der Erwartungswert  $\mu$  und die Varianz  $\sigma^2$  errechnen sich wie folgt:

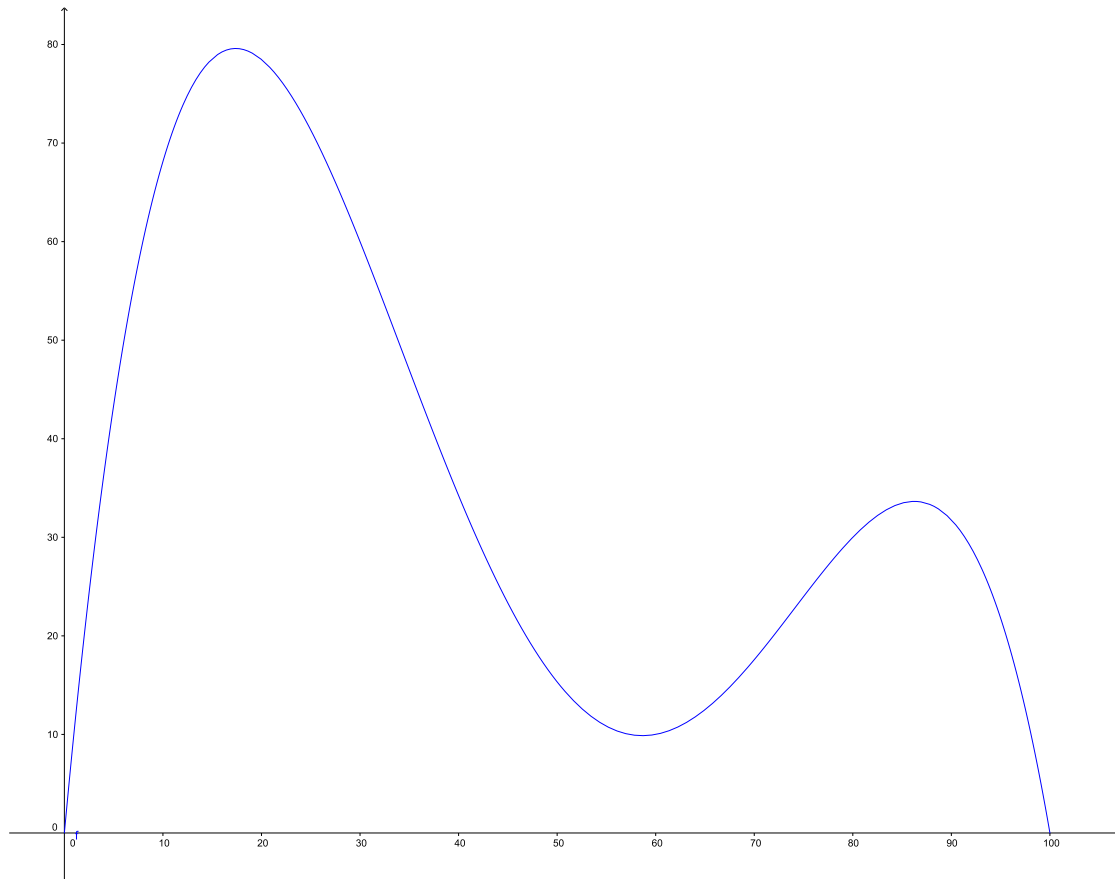
$$\begin{aligned}\mu &= 0,95 \cdot 145 = 137,75 \\ \sigma^2 &= 145 \cdot 0,95 \cdot (1 - 0,95) = 6,8875\end{aligned}$$

### Übung

In einer Klasse befinden sich 30 Schülerinnen bzw. Schüler. Jeden Tag wird per Los ermittelt, welcher Schüler bzw. welche Schülerin den Tag über Tafeldienst hat. Berechne nun jeweils die Wahrscheinlichkeit, dass ein Schüler **genau einmal**, **öfter als einmal** und **seltener als zweimal** zum Tafeldienst eingeteilt wird. Berechne ferner den Erwartungswert und die Varianz, sowie die Standardabweichung.

## Extrema

In diesem Kapitel werden wir uns mit Extremstellen von Funktionen beschäftigen. Stellen wir uns dazu eine Achterbahnfahrt vor. Der Verlauf der Achterbahn wird im folgenden Bild vereinfacht dargestellt:



Die x-Achse repräsentiert hierbei die zurückgelegte Strecke, die y-Achse auf welcher Höhe sich die Bahn befindet.

## Theorie

### Lokales Extremum

Es sei  $f$  eine reelle Funktion mit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , wobei  $I \subset \mathbb{R}$ . Wir betrachten nun eine Umgebung  $U$ , welche eine Teilmenge von  $I$  ist. Es sei nun  $x$  im Inneren von  $U$  (also keine Randstelle). Der Punkt  $E(x|f(x))$  ist ein

- **lokales Minimum** von  $f$ , wenn für alle  $u \in U$  gilt, dass  $f(x) \leq f(u)$  ist, bzw. ein
- **lokales Maximum** von  $f$ , wenn für alle  $u \in U$  gilt, dass  $f(x) \geq f(u)$  ist.

Ein lokales Extremum liegt vor, wenn der betrachtete Punkt ein lokales Minimum oder ein lokales Maximum ist.

## Globales Extremum

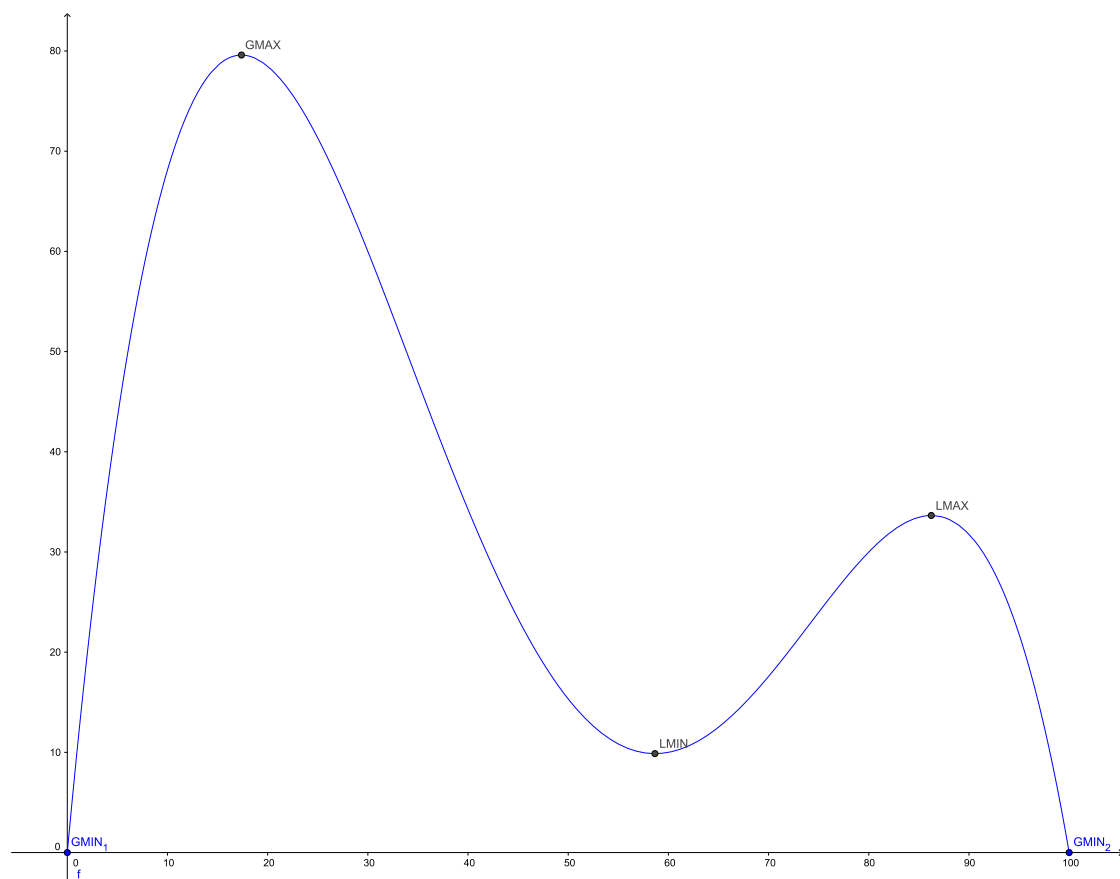
Es sei  $f$  eine reelle Funktion mit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , wobei  $I \subset \mathbb{R}$ . Es sei nun  $x \in I$ . Der Punkt  $E(x|f(x))$  ist ein

- **globales Minimum** von  $f$ , wenn für alle  $i \in I$  gilt, dass  $f(x) \leq f(i)$  ist, bzw. ein
- **globales Maximum** von  $f$ , wenn für alle  $i \in I$  gilt, dass  $f(x) \geq f(i)$  ist.

Ein globales Extremum liegt vor, wenn der betrachtete Punkt ein globales Minimum oder ein globales Maximum ist.

## Beispiel

Wir betrachten wiederum unser Achterbahnbeispiel und finden folgende Extrema:



In obiger Abbildung ist das globale Maximum mit GMAX markiert. Diese Stelle entspricht also dem höchsten Punkt unserer Achterbahnfahrt. Es existiert noch ein weiteres Maximum, allerdings handelt es sich hierbei nur um ein lokales Maximum (LMAX), da im Laufe der Fahrt noch höhere Punkte passiert werden. In seiner Umgebung jedoch ist dies der höchste Punkt.

Des Weiteren finden wir auch noch globale Minima ( $GMIN_1$ ,  $GMIN_2$ ). Sie befinden

sich beim Start und beim Ende unserer Achterbahnfahrt. Während der Fahrt erreichen wir auch noch ein lokales Minimum (LMIN), welches in seiner Umgebung der niedrigste Punkt ist. Jedoch gibt es mit dem Start- und Endpunkt noch niedrigere Punkte.

## Übung

1. Zeichne die quadratische Funktion  $f$  mit  $f(x) = x^2$  im Intervall  $[-3; +3]$  und markiere die dabei auftretenden Extrema!
2. Zeichne die Funktion  $f$  mit  $f(x) = x^3 - x$  im Intervall  $[-2; +2]$  und markiere die dabei auftretenden Extrema!

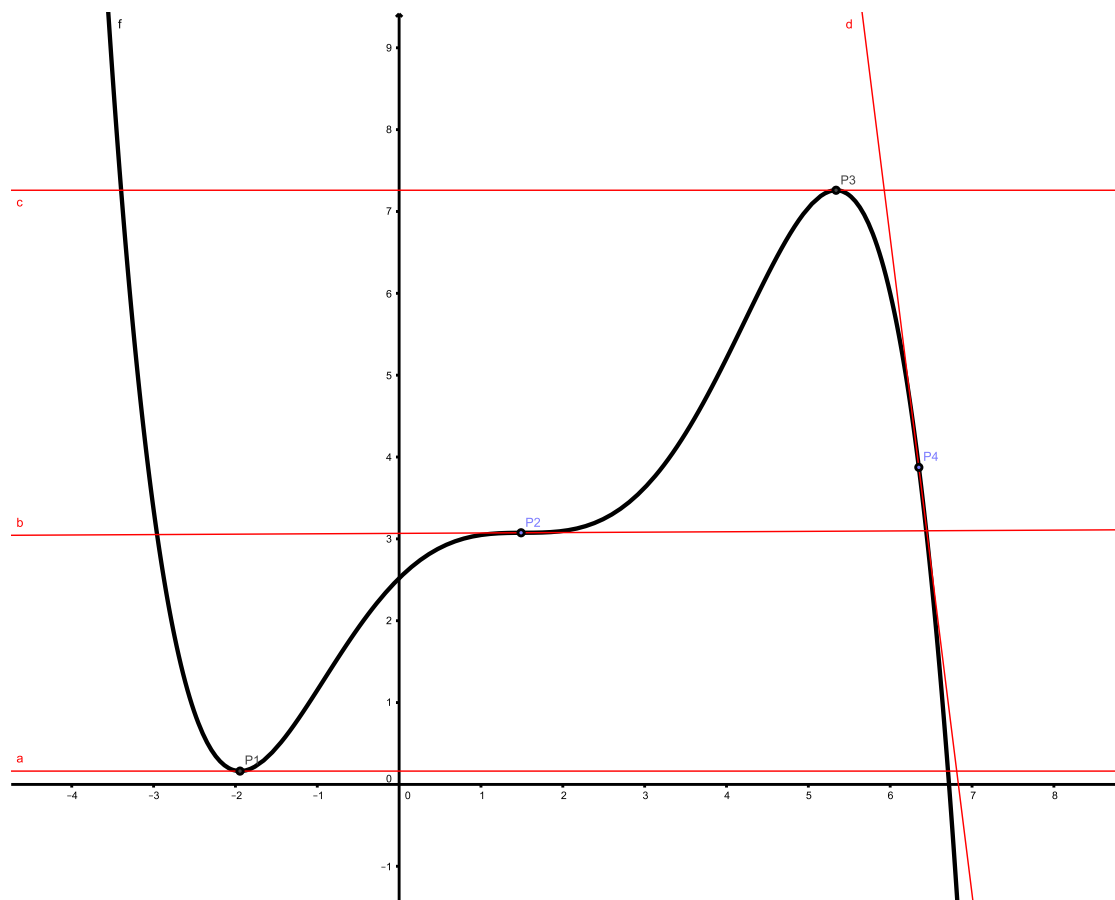
## Quiz

[Zum Quiz](#)

## Berechnung von Extrema anhand der Differentialrechnung

### Theorie

Wir haben bereits gelernt, was Extrema im Allgemeinen sind. Im aktuellen Kapitel werden wir lernen, wie wir diese mithilfe der Differentialrechnung berechnen können. Durch einen Punkt  $P(x|f(x))$  auf der Funktion  $f$  können wir eine Gerade mit der Steigung  $f'(x)$  legen. Eine solche Gerade nennen wir Tangente. Dies sollte bereits aus einem vergangenen Kapitel bekannt sein. Betrachten wir nun folgende Funktion, bei welcher einige Tangenten beispielhaft eingezeichnet wurden:



Wie wir anhand der beispielhaften Funktion feststellen können, ist die Steigung in den potenziellen Extrema ( $P_1, P_2, P_3$ ) gleich 0 (waagrechte Tangente). Wir haben also eine notwendige Bedingung für eine Extremstelle (x-Wert zu einem Extremum) gefunden und können folgenden Satz formulieren:

### Satz

Hat die Funktion  $f$  an der Stelle  $x$  eine Extremstelle so gilt, dass  $f'(x) = 0$  ist.

In obiger Abbildung ist ferner ersichtlich, dass es sich beim Punkt  $P_2(p_2|f(p_2))$  um kein Extremum handelt, aber  $f'(p_2) = 0$  gilt. Eine solche Stelle nennen wir Sattelstelle; ihr werdet sie im Kapitel über Sattelpunkte genauer kennen lernen. Einstweilen geben wir uns mit der Erkenntnis zufrieden, dass es sich hierbei um kein Extremum handelt, obwohl

$f'(p_2) = 0$  gilt. Wir benötigen also eine zusätzliche Bedingung für ein Extremum, welche wir erhalten, wenn wir auf die Krümmung von Funktionen zurückgreifen:

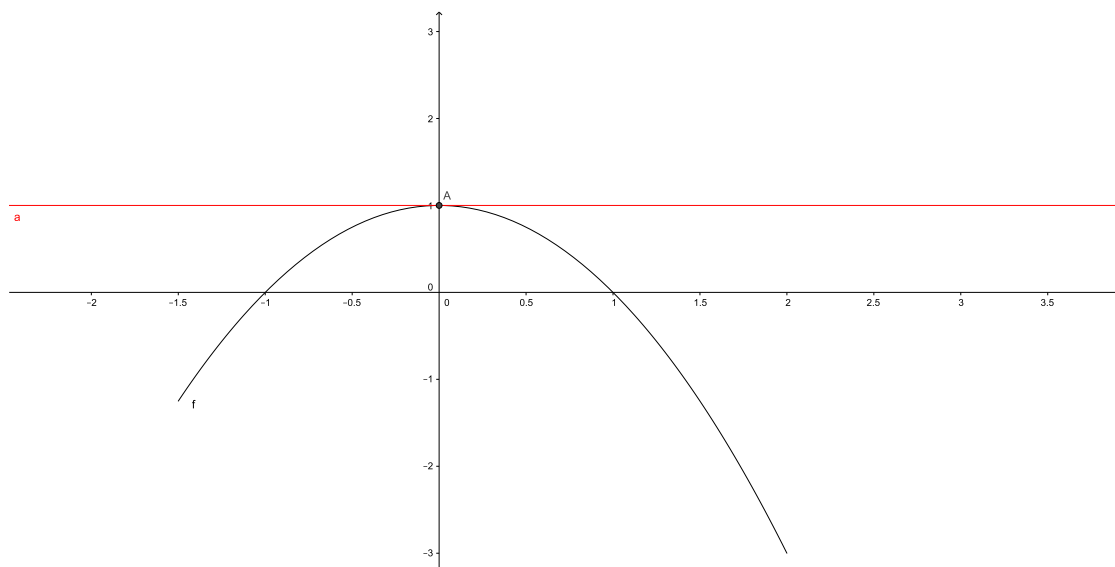
### Satz

Es sei  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$  eine reelle Funktion. Wir betrachten eine Teilmenge  $I$  von  $\mathbb{D}$ . Auf dieser Teilmenge liegt sodann ein:

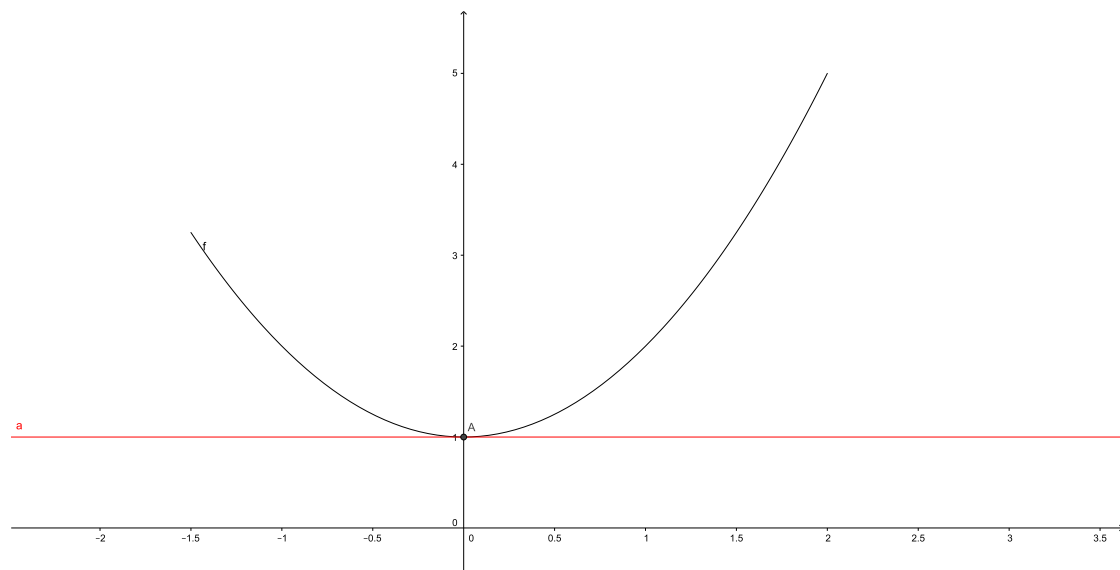
- lokales Minimum von  $f$  an der Stelle  $x$  vor, wobei  $x$  aus dem inneren von  $I$  stammt, wenn  $f'(x) = 0$  und  $f''(x) > 0$  gelten, bzw. ein
- lokales Maximum von  $f$  an der Stelle  $x$  vor, wobei  $x$  aus dem inneren von  $I$  stammt, wenn  $f'(x) = 0$  und  $f''(x) < 0$  gelten.

Gilt also, dass  $f''(x) \neq 0$  ist wobei  $x$  aus dem inneren von  $I$  stammt, dann befindet sich an der Stelle  $x$  ein Extremum.

Wie bereits erwähnt, greifen wir bei jener Überlegung auf die Krümmung zurück. Wenn wir die Rechtskrümmung betrachten wird klar, wieso bei der zusätzlichen Bedingung  $f''(x) < 0$  ein Maximum vorliegt:



Durch die zusätzliche Bedingung mit dem Krümmungsverhalten, entsteht so garantiert ein Maximum. Eine ähnliche Überlegung kann dann anhand der folgenden Abbildung für das Minimum angestellt werden:



Des Weiteren können wir feststellen, dass auch eine Änderung des Monotonieverhaltens als Bedingung hinreichend ist. Wir formulieren folgenden Satz:

### Satz

Ändert sich das Monotonieverhalten einer Funktion an der Stelle  $x$ , so existiert an dieser Stelle ein lokales Extremum.

### Beispiel

Berechne die Extrema der folgenden Funktion:  $f(x) = 2x^3 - 3x^2$

Wir berechnen zuerst die benötigten Ableitungen:

$$f'(x) = 6x^2 - 6x$$

$$f''(x) = 12x - 6$$

Wir suchen nun nach potenziellen Extremstellen, indem wir untersuchen für welche  $x$  gilt, dass  $f'(x) = 0$  ist.  $6x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow 6x(x-1) = 0$

Es gilt also, dass für  $x = 0$  und  $x = 1$   $f'(x) = 0$  ist.

Wir untersuchen nun ob bei  $x = 0$  tatsächlich eine Extremstelle vorliegt:

$$f''(0) = 12 \cdot 0 - 6 = -6 < 0, \text{ also liegt hier eine Maximumsstelle vor.}$$

Das zugehörige Maximum lautet:  $Max(0|0)$

Wir untersuchen nun  $x = 1$ :

$$f''(1) = 12 - 6 = 6 > 0, \text{ es liegt also eine Minimumsstelle vor.}$$

Das zugehörige Minimum lautet:  $Min(1|-1)$

### Übung

Finde alle Extrema für folgende Funktionen:

1.  $f(x) = 2x^2 - 4x + 9$

2.  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 5$

## Berechnung von Extremstellen in endlichen Intervallen

### Theorie

Wir haben bereits gelernt wie wir Extrema von Funktionen bestimmen können. Allerdings haben wir die Berechnungen bis jetzt nur in unendlichen Intervallen durchgeführt. In diesem Kapitel wollen wir betrachten wie wir vorgehen müssen, wenn wir Funktionen in endlichen Intervallen betrachten.

Unser Vorgehen bei der Berechnung bleibt grundsätzlich gleich. Nun ist es jedoch ohne Weiteres möglich auch die globalen Extremstellen zu finden. Hierzu müssen wir zusätzlich zu unseren gefundenen Extremstellen auch noch die Randpunkte der Funktion betrachten und diese beim Festlegen unserer globalen Extremstellen miteinbeziehen. Wie dies funktioniert, werdet ihr anhand des folgenden Beispiels kennenlernen.

### Beispiel

Berechne die Extrema der Funktion  $f$  mit  $f(x) = 2x^3 - 3x^2$  im Intervall  $[-1; 2]$

Im Kapitel *Berechnung von Extrema anhand der Differentialrechnung* haben wir bereits folgende Extrema berechnet:

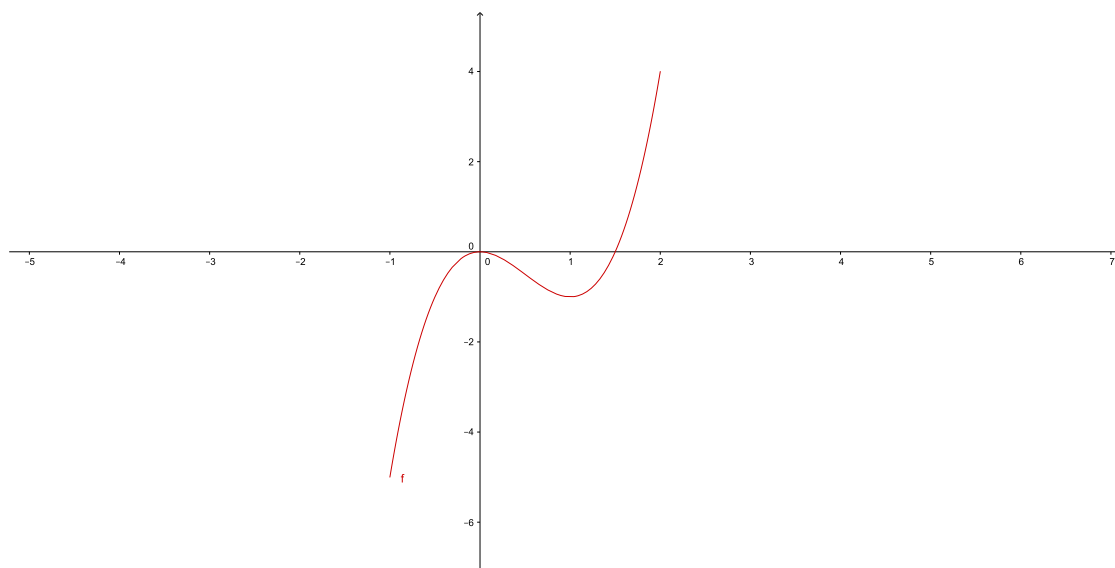
Wir haben ein Maximum  $Max(0|0)$  und ein Minimum  $Min(1|-1)$  gefunden. Wir müssen nun noch zusätzlich das Verhalten am Rand betrachten:

$$f(-1) = -5$$

$$f(2) = 4$$

Damit ergeben sich zusätzliche Extrema mit  $Max_{rand}(2|4)$  und  $Min_{rand}(-1|-5)$ . Bei  $Max_{rand}$  handelt es sich um ein globales Maximum, da alle anderen Maxima von diesem Extremum übertroffen werden. Bei  $Min_{rand}$  handelt es sich um ein globales Minimum, da alle anderen Minima von diesem Extremum unterboten werden.

Zur Veranschaulichung die Skizze der Funktion:



## Übung

1. Berechne die Extrema von  $f(x) = x^2$  im Intervall  $[-3; +3]$  !
2. Berechne die Extrema von  $f(x) = x^3 - x$  im Intervall  $[-2; +2]$  !

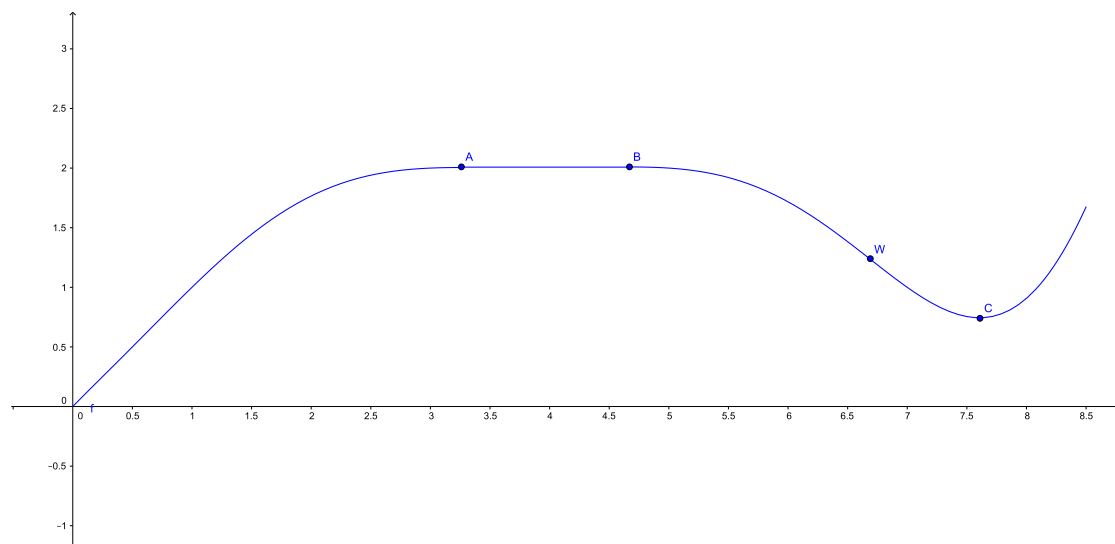
## Funktionen und ihre zugehörige Ableitungsfunktion

### Theorie

In diesem Kapitel wollen wir zuerst aus einem gegebenen Graphen einer beliebigen Funktion seine Ableitungsfunktion konstruieren. Wir werden dazu die Bewegung eines Körpers betrachten. Die betrachtete Funktion selbst steht dabei für den zurückgelegten Weg zu einer gewissen Zeit, es handelt sich also um eine sogenannte Zeit-Ort-Funktion. Wir betrachten zuerst ein Beispiel, bei welchem wir zum Graphen die Ableitungsfunktion finden wollen. Danach werden wir den umgekehrten Weg gehen und zur Ableitungsfunktion die zugehörige Funktion rekonstruieren.

### Beispiel

Wir betrachten beispielhaft folgenden Funktionsgraphen, welcher die Bewegung eines Autos beschreibt (der y-Wert  $s(t)$  steht dabei für den zurückgelegten Weg zu einer bestimmten Zeiteinheit, die x-Achse beschreibt die Zeit  $t$ ):

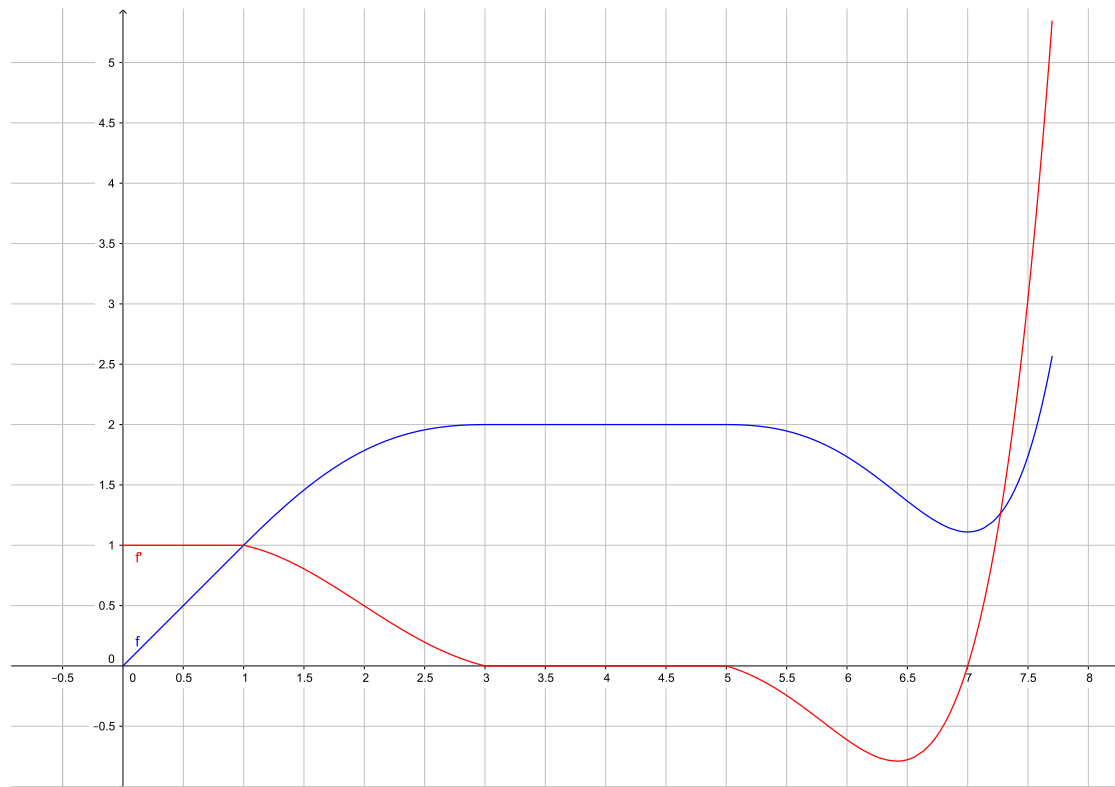


In jener Funktion sind bereits einige wichtige Punkte markiert. Jene Punkte sind zum einen Extrema, also Punkte bzw. Bereiche, bei welchen die Ableitung gleich 0 ist, also jene Punkte bzw. Bereiche bei welchen sich das Auto nicht bewegt. Das sind die Punkte  $A$ ,  $B$  und  $C$ , sowie der Bereich zwischen  $A$  und  $B$  bei welchem der Autofahrer eine kurze Verschnaufpause einlegt. Wir wissen hier also, dass in jenem Bereich die Ableitungsfunktion konstant 0 ist.

Nun wissen wir, wo unsere Nullstellen der Ableitungsfunktion liegen. Um diese skizzieren zu können, benötigen wir jedoch mehr Informationen. Eine solche Informationsquelle sind jene Bereiche, in welchen die Funktion monoton steigend bzw. monoton fallend ist. Unser Graph wäre vom Ursprung bis  $A$  streng monoton steigend, zwischen  $A$  und  $B$ , wie bereits erforscht, konstant, von  $B$  bis  $C$  streng monoton fallend und ab  $C$  wieder streng monoton steigend.

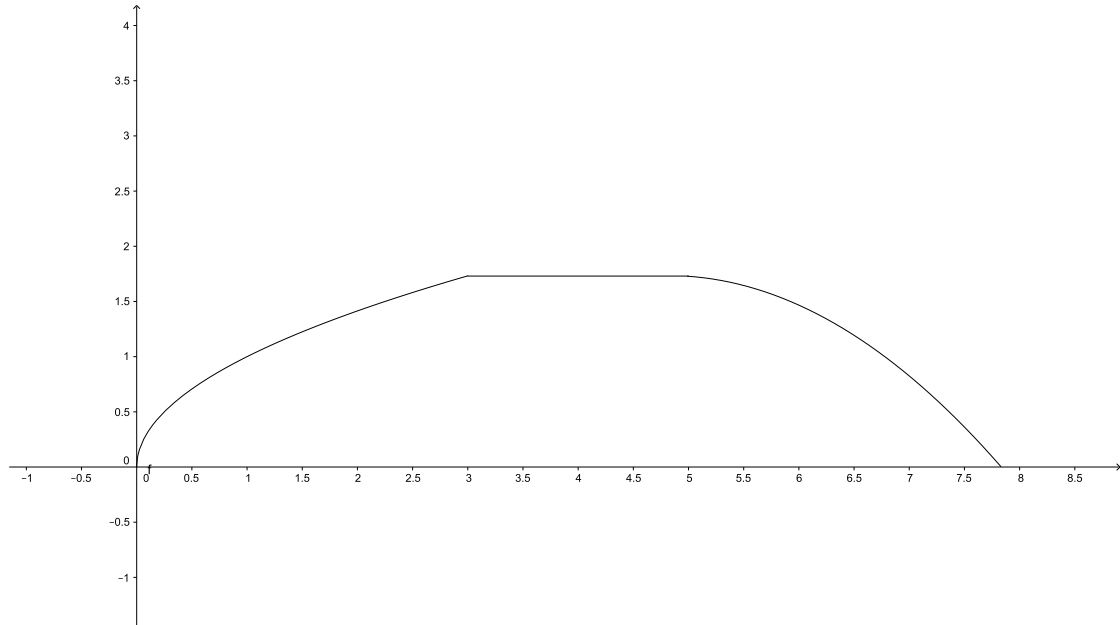
Um nun die Ableitungsfunktion endgültig konstruieren zu können, müssen wir auch noch die Wendepunkte betrachten und hier die Steigung der Tangente abschätzen, um einen  $y$ -Wert für die Ableitungsfunktion in jenem Punkt zu erhalten. In unserem Fall ist die Steigung im Punkt  $W$  rund  $-0,8$ .

Wir erhalten folgende Ableitungsfunktion:



**Übung**

Stelle zur unteren Funktion graphisch die 1. Ableitung dar:



## Mittelwert, Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung

### Theorie

In diesem Kapitel werden wir uns mit unterschiedlichen Kennzahlen beschäftigen. Die  $x_i$  beschreiben dabei die Werte der jeweiligen Ereignisse selbst.

Wir beginnen mit dem (gewichteten) Mittelwert.

### Mittelwert

Das gewichtete Mittel  $\bar{x}$  lässt sich mithilfe der Werte  $x_i$  (wobei  $i = 1, \dots, k$ ) und den zugehörigen relativen Häufigkeiten  $h_n(x_i)$  wie folgt berechnen:

$$\bar{x} = x_1 \cdot h_n(x_1) + x_2 \cdot h_n(x_2) + \dots + x_k \cdot h_n(x_k)$$

Die relative Häufigkeit bestimmt also, mit welchem Maß ein Wert  $x_i$  in die Berechnung des Mittelwerts einfließt. Der Begriff des Mittelwerts führt uns zum nahestehenden Begriff des Erwartungswerts:

### Erwartungswert

Der Erwartungswert  $\mu$  wird mithilfe der Werte  $x_i$  (wobei  $i = 1, \dots, k$ ) und den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten  $p_i$  wie folgt berechnet:

$$\mu = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \dots + x_k \cdot p_k$$

Der Erwartungswert entspricht also weitestgehend dem Mittelwert. Der Mittelwert nähert sich dem Erwartungswert mit einer zunehmenden Versuchszahl  $n$  immer weiter an (vergleiche dazu das Kapitel über die relative Häufigkeit). Der Erwartungswert ist jedoch unterschiedlich aussagekräftig. Um zu messen wie aussagekräftig er ist, verwenden wir die Varianz bzw. die Standardabweichung.

### Varianz und Standardabweichung

Wie der Erwartungswert, baut auch die Varianz zunächst auf relativen Häufigkeiten auf. Wir erhalten die sogenannte empirische Varianz  $s^2$  wie folgt:

$$s^2 = (x_1 - \bar{x})^2 \cdot h_n(x_1) + (x_2 - \bar{x})^2 \cdot h_n(x_2) + \dots + (x_k - \bar{x})^2 \cdot h_n(x_k)$$

Wir benötigen für die Berechnung also zunächst den Mittelwert. Um die empirische Standardabweichung  $s$  zu erhalten, rechnen wir:

$$s = \sqrt{(x_1 - \bar{x})^2 \cdot h_n(x_1) + (x_2 - \bar{x})^2 \cdot h_n(x_2) + \dots + (x_k - \bar{x})^2 \cdot h_n(x_k)}$$

Von diesen Überlegungen ausgehend können wir nun die Varianz sowie die Standardabweichung berechnen. Wir verwenden die gleichen Überlegungen wie beim Erwartungswert und ersetzen die relative Häufigkeit durch die Wahrscheinlichkeit bzw. den Mittelwert durch den Erwartungswert. So errechnet sich die Varianz  $\sigma^2$  wie folgt:

$$\sigma^2 = (x_1 - \mu)^2 \cdot p_1 + (x_2 - \mu)^2 \cdot p_2 + \dots + (x_k - \mu)^2 \cdot p_k$$

Die Standardabweichung  $\sigma$  erhalten wir daraus mittels:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

**Beispiel**

Wir greifen das Beispiel zur Augensumme aus dem Kapitel Zufallsvariablen auf und berechnen die Standardabweichung.

Zunächst benötigen wir den Erwartungswert. Jenen erhalten wir wie folgt:

$$\mu = 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} + 4 \cdot \frac{3}{36} + 5 \cdot \frac{4}{36} + 6 \cdot \frac{5}{36} + 7 \cdot \frac{6}{36} + 8 \cdot \frac{5}{36} + 9 \cdot \frac{4}{36} + 10 \cdot \frac{3}{36} + 11 \cdot \frac{2}{36} + 12 \cdot \frac{1}{36} = \frac{252}{36} = 7$$

Und nun die Varianz:

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= (2-7)^2 \cdot \frac{1}{36} + (3-7)^2 \cdot \frac{2}{36} + (4-7)^2 \cdot \frac{3}{36} + (5-7)^2 \cdot \frac{4}{36} \\ &\quad + (6-7)^2 \cdot \frac{5}{36} + (7-7)^2 \cdot \frac{6}{36} + (8-7)^2 \cdot \frac{5}{36} + (9-7)^2 \cdot \frac{4}{36} \\ &\quad + (10-7)^2 \cdot \frac{3}{36} + (11-7)^2 \cdot \frac{2}{36} + (12-7)^2 \cdot \frac{1}{36} = \frac{210}{36} = 5,83\end{aligned}$$

Wir berechnen daraus wiederum die Standardabweichung:

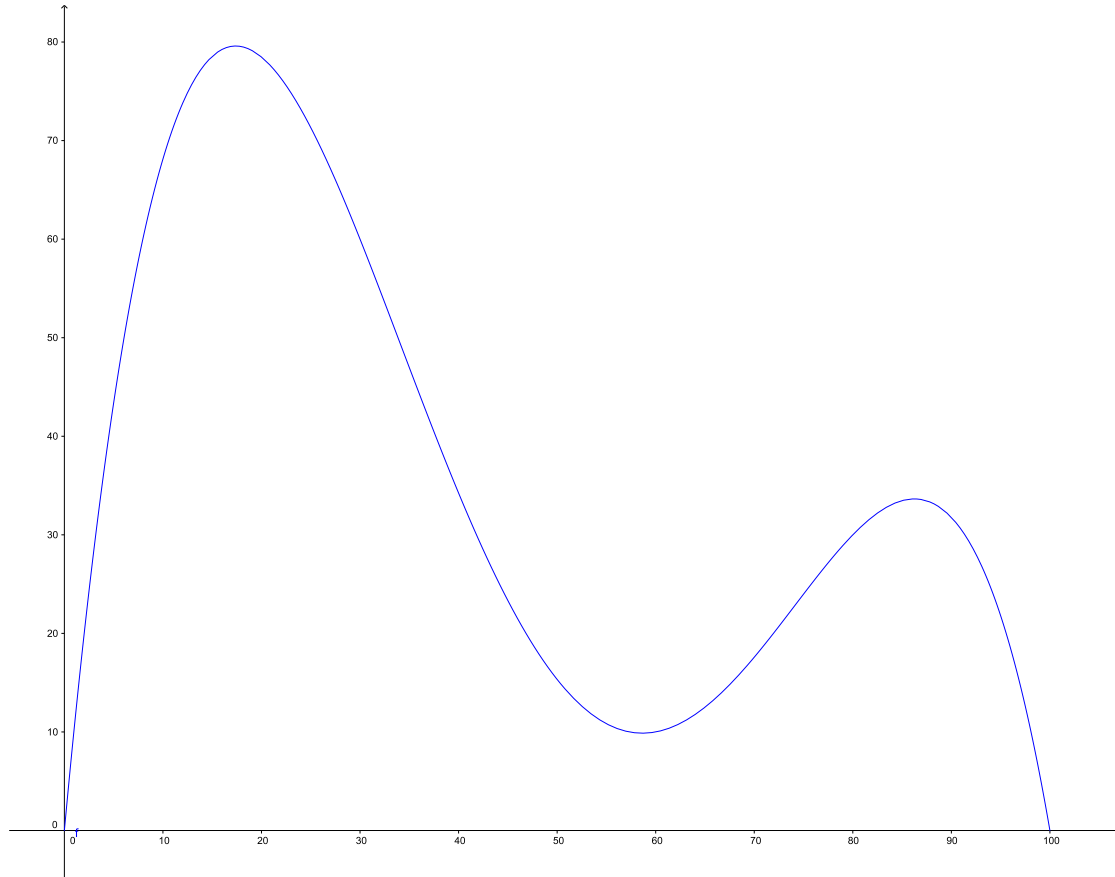
$$\sigma = \sqrt{5,83} = 2,42$$

**Übung**

Berechne für das Übungsbeispiel der Notenverteilung aus dem Kapitel über Zufallsvariablen die Standardabweichung.

## Monotonie

In diesem Kapitel werden wir uns mit der Monotonie von Funktionen beschäftigen. Stellen wir uns dazu eine Achterbahnfahrt vor. Der Verlauf der Achterbahn wird im folgenden Bild vereinfacht dargestellt:



Die x-Achse repräsentiert hierbei die zurückgelegte Strecke, die y-Achse auf welcher Höhe sich die Bahn befindet.

### Theorie

Eine Funktion  $f$  heißt in einem Teilintervall ihres Definitionsbereiches

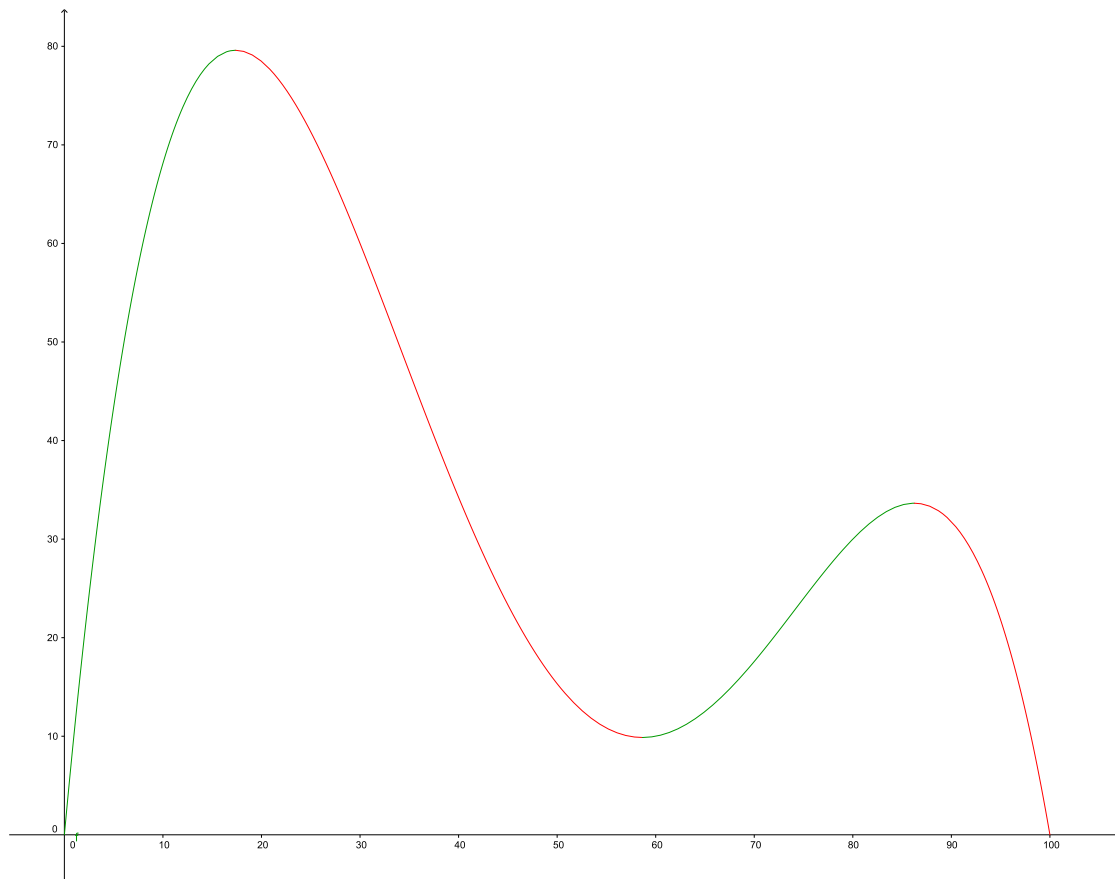
- **monoton steigend**, wenn aus  $x_1 < x_2$  folgt, dass  $f(x_1) \leq f(x_2)$ ,
- **streng monoton steigend**, wenn aus  $x_1 < x_2$  folgt, dass  $f(x_1) < f(x_2)$ ,
- **monoton fallend**, wenn aus  $x_1 < x_2$  folgt, dass  $f(x_1) \geq f(x_2)$ , bzw.
- **streng monoton fallend**, wenn aus  $x_1 < x_2$  folgt, dass  $f(x_1) > f(x_2)$ .

Also ist eine Funktion auf einem Teilintervall ihres Definitionsbereiches monoton steigend, wenn mit steigendem x-Wert auch der y-Wert steigt oder zumindest gleich bleibt. Ist die Funktion auf ihrem Teilintervall streng monoton steigend, so muss auch der y-Wert steigen und darf nicht gleich bleiben.

Ähnliches gilt in die andere Richtung. Eine Funktion ist auf einem Teilintervall ihres Definitionsbereiches monoton fallend, wenn mit steigendem  $x$ -Wert der  $y$ -Wert fällt oder zumindest gleich bleibt. Ist die Funktion auf ihrem Teilintervall streng monoton fallend, so ist der  $y$ -Wert stets fallend und darf nicht gleich bleiben.

### Beispiel

Wir wollen anhand unseres Beispiels mit der Achterbahn nun anschaulich betrachten, welche Teile der Funktion welches Monotonieverhalten haben. Hierbei markieren wir jene Teile der Funktion grün, welche monoton steigend (bzw. in unserem Fall sogar streng monoton steigend) sind und jene Teile rot, welche monoton fallend (bzw. in unserem Fall sogar streng monoton fallend) sind:



Wir können beobachten, dass wenn die Bahn nach oben gezogen wird, es sich um eine monotone Steigung (bzw. in unserem Fall eine streng monotone Steigung handelt) und wenn sie nach unten rast sie monoton fällt (bzw. in unsrem Fall streng monoton fällt).

### Übung

1. Gib eine möglichst einfache Funktion an, welche monoton steigend ist!
2. Gib eine möglichst einfache Funktion an, welche monoton fallend ist!

3. Gib eine möglichst einfache Funktion an, welche streng monoton steigend ist!
4. Gib eine möglichst einfache Funktion an, welche streng monoton fallend ist!

### Quiz

[Zum Quiz](#)

## Polynomdivision

### Theorie

Mithilfe einer Polynomdivision können wir die Nullstellen eines Polynoms  $n$ -ten Grades bestimmen. Im Rahmen der Polynomdivision wird der eigentliche Term des Polynoms durch einen dem Polynom zugehörigen Linearfaktor dividiert. Der zugehörige Linearfaktor ergibt sich aus einer Nullstelle des Polynoms. Das Auffinden dieser Nullstelle kann entweder durch ein geeignetes Verfahren wie das Newton-Verfahren erfolgen, oder durch simples Raten der Nullstelle, was im Schulkontext in der Regel als ausreichend gilt.

Durch die gefundene Nullstelle kann ein Linearfaktor des Polynoms gebildet werden, welcher sodann vom eigentlichen Polynom abgespalten wird. Hierdurch ergibt sich ein neuer Polynomterm  $n - 1$ -ten Grades. Mathematisch formuliert gilt also das Folgende:

### Satz

Es sei  $f(x)$  ein Polynom  $n$ -ten Grades und  $a$  eine Nullstelle des Polynoms. Dann gilt  $f(x) = (x - a) \cdot g(x)$  für alle  $x$  aus  $\mathbb{R}$ , wobei  $g(x)$  ein Polynom vom Grad  $n - 1$  ist.

Beim Polynom  $g(x)$  muss nun über die weitere Vorgehensweise entschieden werden. Im Kontext in welchem wir in der Schule meist arbeiten, können die Nullstellen von  $g(x)$  nun mit herkömmlichen Methoden wie beispielsweise der großen Lösungsformel oder durch Substitution bestimmt werden. Allgemein jedoch könnte es durchaus möglich sein, dass es notwendig ist, weitere Linearfaktoren abzuspalten. Dies geschieht immer vom neu gefundenen Term ausgehend. Beispielsweise könnten wir wiederum durch Probieren eine Nullstelle von  $g(x)$  finden (wir bezeichnen diese mit  $a_2$ ) und uns daraus einen weiteren Linearfaktor konstruieren. Durch Abspalten dieses Linearfaktors erhalten wir einen neuen Term, welchen wir mit  $h(x)$  bezeichnen. Es gilt:

$$f(x) = (x - a) \cdot g(x) = (x - a) \cdot (x - a_2) \cdot h(x)$$

Diese Vorgehensweise kann nun so oft wiederholt werden, bis wir auf den verbleibenden Term eines unserer bekannten Verfahren anwenden können, oder sich keine Linearfaktoren mehr vom Term abspalten lassen (wir bezeichnen diesen Term mit  $l(x)$ ).

Es gilt:

$$f(x) = (x - a) \cdot (x - a_2) \cdot \dots \cdot (x - a_n) \cdot l(x)$$

Allgemein lässt sich dazu Folgendes formulieren:

### Satz

Eine Gleichung vom Grad  $n$  hat höchstens  $n$  Lösungen.

Das bedeutet soviel wie, dass wir von unserem Ausgangspolynom höchstens  $n$  Linearfaktoren abspalten können. Beachte jedoch, dass es sich hierbei nicht um  $n$  verschiedene Lösungen handeln muss. Beispielsweise hätte  $(x - 2)^2 = 0$  nur eine Lösung, nämlich  $x = 2$ . Hier handelt es sich beispielsweise um eine sogenannte Doppelnulstelle. Durch mehrfache Nullstellen kann die Anzahl der Lösungen also auch kleiner als der Grad sein.

Um das doch recht abstrakte Verfahren anschaulicher zu gestalten, wollen wir es im folgenden Beispiel mit der analogen Vorgehensweise beim schriftlichen Dividieren gegenüberstellen.

**Beispiel**

Wir betrachten zuerst eine einfache schriftliche Division und versuchen sodann den Vorgang bei einer Polynomdivision auf diesen zurückzuführen:

$$\begin{array}{r}
 55944 : 37 = 1512 \\
 \underline{-37} \\
 189 \\
 \underline{-185} \\
 44 \\
 \underline{-37} \\
 74 \\
 \underline{-74} \\
 0
 \end{array}$$

Wir wollen nun von folgendem Polynom die Nullstellen in  $\mathbb{R}$  bestimmen:

$$f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 11x - 7$$

Zuerst gilt es, durch Versuchen eine Nullstelle des Polynomes zu erraten. Bei ganzzahligen Polynomen wie diesem, bietet es sich außerdem an, Teiler des Absolutglieds (also in unserem Fall Teiler von  $-7$ ) als mögliche Nullstellen zu untersuchen. Für unser Polynom erhalten wir als erste gefundene Nullstelle  $x = 1$  und können daraus den ersten Linearfaktor basteln.

Unser gefundener Linearfaktor lautet somit  $(x-1)$  und wir können unsere Polynomdivision wie folgt anschreiben:

$$(2x^3 - 6x^2 + 11x - 7) : (x - 1) =$$

Wie bei der schriftlichen Division von Zahlen unterteilen wir nun unser Polynom in Teile welche wir betrachten wollen. Bei der schriftlichen Division wurde die Zahl so unterteilt, dass eine Teilung durch den Divisor möglich wurde. Bei der Polynomdivision betrachten wir stets jenen Term zuerst, welcher den höchsten Grad aufweist, also  $2x^3$  in unserem Beispiel. Auch von unserem Linearfaktor wählen wir den höchsten Term und überprüfen wie oft dieser in  $2x^3$  hineinpasst.

Vereinfacht gesagt überlegt man sich, mit welchem Term  $x$  multipliziert werden muss, damit wir  $2x^3$  erhalten. Die Antwort hierbei lautet, dass  $x$  mit  $2x^2$  multipliziert werden muss.

$$(2x^3 - 6x^2 + 11x - 7) : (x - 1) = 2x^2$$

Wie bereits bei der schriftlichen Division multipliziert man nun den gerade gefundenen Teil des Ergebnisses mit den Divisor und mit  $-1$  und schreibt die Terme passend untereinander:

$$\begin{array}{r}
 (2x^3 - 6x^2 + 11x - 7) : (x - 1) = 2x^2 \\
 \underline{-2x^3 + 2x^2}
 \end{array}$$

Wir addieren nun die vorhandenen Terme und fügen den nächsten vom Ausgangspolynom noch nicht verwendeten Teil zu unserem neu gefundenen Polynom hinzu:

$$\begin{array}{r} (2x^3 - 6x^2 + 11x - 7) : (x - 1) = 2x^2 \\ - 2x^3 + 2x^2 \\ \hline - 4x^2 + 11x \end{array}$$

Wir fahren nun gleich fort mit dem Unterschied, dass wir jetzt  $4x^2 + 11x - 7$  quasi als unser Ausgangspolynom ansehen. Nun ist  $4x^2$  unser größter Term. Wir überlegen uns wiederum, mit welchem Term wir  $x$  multiplizieren müssen um  $4x^2$  zu erhalten. Der gesuchte Term lautet  $4x$ . Wir fügen diesen Term zu unserem bereits zur Lösung gehörenden Term hinzu und führen dieselben Schritte wie zuvor beschrieben aus (Multiplikation von Teilergebnis mit Divisor, Subtraktion, Anschreiben des neuen Polynoms). Wir erhalten:

$$\begin{array}{r} (2x^3 - 6x^2 + 11x - 7) : (x - 1) = 2x^2 - 4x \\ - 2x^3 + 2x^2 \\ \hline - 4x^2 + 11x \\ 4x^2 - 4x \\ \hline 7x - 7 \end{array}$$

Wir haben uns nun soweit vorgearbeitet, dass die Gradzahl des Linearfaktors jener des neues Ausgangspolynoms entspricht. Dies bedeutet für uns, dass wir noch eine Division durchführen müssen. Wir untersuchen wieder, mit welchem Term  $x$  multipliziert werden muss, damit wir  $7x$  erhalten. Wir erreichen dies mit  $7$ . Nach Ausführung der weiteren Schritte müssen wir in unserem Kontext der Untersuchung der Nullstellen (ihr werdet die Polynomdivision auch noch bei Integralen benötigen, aber dazu später mehr) als Rest  $0$  erhalten:

$$\begin{array}{r} (2x^3 - 6x^2 + 11x - 7) : (x - 1) = 2x^2 - 4x + 7 \\ - 2x^3 + 2x^2 \\ \hline - 4x^2 + 11x \\ 4x^2 - 4x \\ \hline 7x - 7 \\ - 7x + 7 \\ \hline 0 \end{array}$$

Mit  $2x^2 - 4x + 7$  haben wir nun jenes Polynom gefunden, welches wir erhalten, wenn wir  $(x - 1)$  von unserem Ausgangspolynom abspalten. Es gilt:

$$f(x) = (x - 1) \cdot (2x^2 - 4x + 7)$$

Um nun die restlichen Nullstellen unseres Polynoms  $f$  zu finden, müssen wir auch noch  $2x^2 - 4x + 7$  untersuchen. Auf dieses Polynom können wir die große Lösungsformel anwenden:

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 2 \cdot 7}}{2}$$

Es ist hierbei ersichtlich, dass das Ergebnis unter der Wurzel negativ ist und wir somit keine weiteren reellen Lösungen erhalten. Wir haben also mit  $x = 1$  die einzige Nullstelle vom Polynom  $f$  gefunden. (*Anmerkung:* Um die Lösungen des Polynoms finden zu können, müssten wir unseren Zahlenbereich auf die komplexen Zahlen erweitern.)

## Relative Häufigkeit

### Theorie

In diesem Kapitel werden wir uns mit der relativen Häufigkeit beschäftigen. Bevor wir diesen Begriff definieren, rufen wir uns den Begriff der absoluten Häufigkeit in Erinnerung:

### Definition

Die absolute Häufigkeit gibt an, wie oft im Rahmen eines Experimentes das Ereignis  $E$  auftritt. Die absoluten Häufigkeiten aller Ereignisse aufsummiert entsprechen dabei der Anzahl der durchgeführten Versuchsdurchgänge.

Die absolute Häufigkeit können wir also mit der Anzahl gleichsetzen. Formal schreiben wir für die absolute Häufigkeit eines Ereignisses  $E$ :  $H_n(E)$ , wobei  $n$  für die Anzahl der Versuche steht. Als Beispiel für eine relative Häufigkeit betrachte Beispiel 1.

Kommen wir nun zum Begriff der relativen Häufigkeit. Hier betrachten wir die Häufigkeit relativ zur Gesamtanzahl der Versuche. Wir definieren sie wie folgt:

### Definition

Die relative Häufigkeit eines Ereignisses  $E$  gibt an, wie oft das Ereignis  $E$  relativ zur Gesamtanzahl der Versuche  $n$  auftritt. Die Summe der relativen Häufigkeiten aller Ereignisse ergibt 1.

Die relative Häufigkeit kann ausgehend von der absoluten Häufigkeit berechnet werden. Wir nehmen an, dass ein bestimmtes Ereignis  $E$  die absolute Häufigkeit  $k$  besitzt und in einer Versuchsreihe aufgetreten ist, welche  $n$ -mal durchgeführt wurde, so berechnen wir die relative Häufigkeit des Ereignisses  $E$  mittels: relative Häufigkeit =  $\frac{k}{n}$  oder formal geschrieben  $h_n(E) = \frac{H_n(E)}{n}$ .

### Zusammenhang mit der Wahrscheinlichkeit

Die Wahrscheinlichkeit ist nichts anderes als ein Maß dafür, wie wahrscheinlich es ist, dass ein bestimmter Ausgang eintritt. Der Begriff der relativen Häufigkeit kommt dem schon sehr nahe, jedoch variiert die relative Häufigkeit für ein bestimmtes Ereignis  $E$  noch recht stark für ein kleines  $n$ , also für eine kleine Anzahl von Versuchen. Der Wert der relativen Häufigkeit wird für ein immer größer werdendes  $n$  immer präziser. Für den (natürlich nur gedanklichen) Fall einer unendlichen Anzahl an Versuchsdurchführungen  $n$  können wir die relative Häufigkeit mit der Wahrscheinlichkeit gleichsetzen.

### Beispiel

Wie experimentieren nun mit einem Würfel und werfen diesen 50-mal. Dabei ergibt sich folgende absolute Häufigkeitsverteilung:

Ereignis	1	2	3	4	5	6
absolute Häufigkeit	12	10	5	10	6	7

Daraus können wir mit der oben angegebenen Formel die relativen Häufigkeiten berechnen:

Ereignis	1	2	3	4	5	6
relative Häufigkeit	0,24	0,2	0,1	0,2	0,12	0,14

Aufsummiert ergibt sich 1, also haben wir richtig gerechnet. In diesem Beispiel ist auch gut ersichtlich, dass mit einer Anzahl von 50 Würfeln noch kein Ergebnis erzielt wird, welches der tatsächlichen Wahrscheinlichkeit von  $\frac{1}{6}$  nahekommt. Dazu würde man wohl rund 1000 Würfe brauchen.

## Übung

Eine Klasse wird von 25 SchülerInnen besucht. Im Rahmen einer Schularbeit ergibt sich folgende Notenverteilung:

Note	1	2	3	4	5
Häufigkeit	3	6	9	3	4

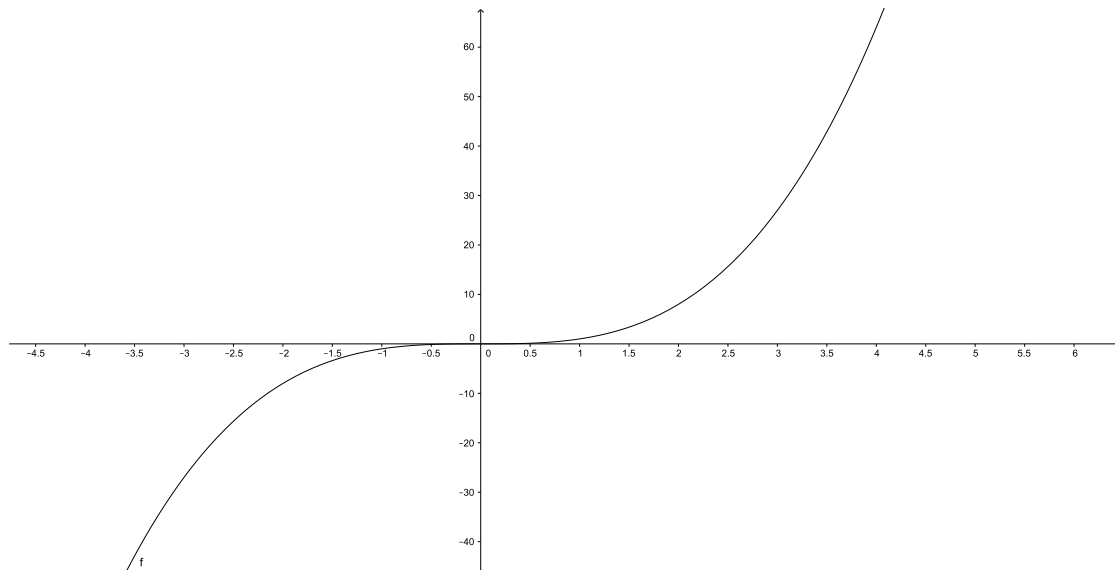
Wie bezeichnen wir die oben auftretenden Häufigkeiten? Begründe deine Antwort. Gib eine Tabelle an, welche die relativen Häufigkeiten der Ergebnisse wiedergibt.

## Sattelpunkte

### Theorie

Im Kapitel *Untersuchen des Monotonieverhaltens einer Funktion* haben wir gelernt, dass wir mithilfe der Extrema entscheiden können, in welchen Bereichen eine Funktion welches Monotonieverhalten hat. Wie wir bereits gelernt haben, muss alleiniges Nullsetzen der ersten Ableitung einer Funktion nicht zwingend eine Extremstelle liefern.

Es kann zu folgendem Umstand kommen:



Obige Funktion  $f$  besitzt die Funktionsgleichung  $f(x) = x^3$ . Als erste Ableitung erhalten wir  $f'(x) = 3x^2$ . Für  $x = 0$  wäre  $f'(x) = 0$ . Wir wissen, dass ein Extremum nur dann vorliegt, wenn sich auch das Monotonieverhalten der Funktion ändert. Jedoch ist ersichtlich, dass die Funktion links von 0 und rechts von 0 monoton steigend ist. Ein Punkt mit einem solchen Verhalten wird als Sattelpunkt bezeichnet.

### Definition

Eine Stelle  $x$  der Funktion  $f$  bei jener die Steigung der Funktion gleich 0 ist, also  $f'(x) = 0$  gilt und sich das Monotonieverhalten der Funktion nicht ändert heißt Sattelstelle von  $f$ . Der zugehörige Punkt wird als Sattelpunkt bezeichnet.

### Beispiel

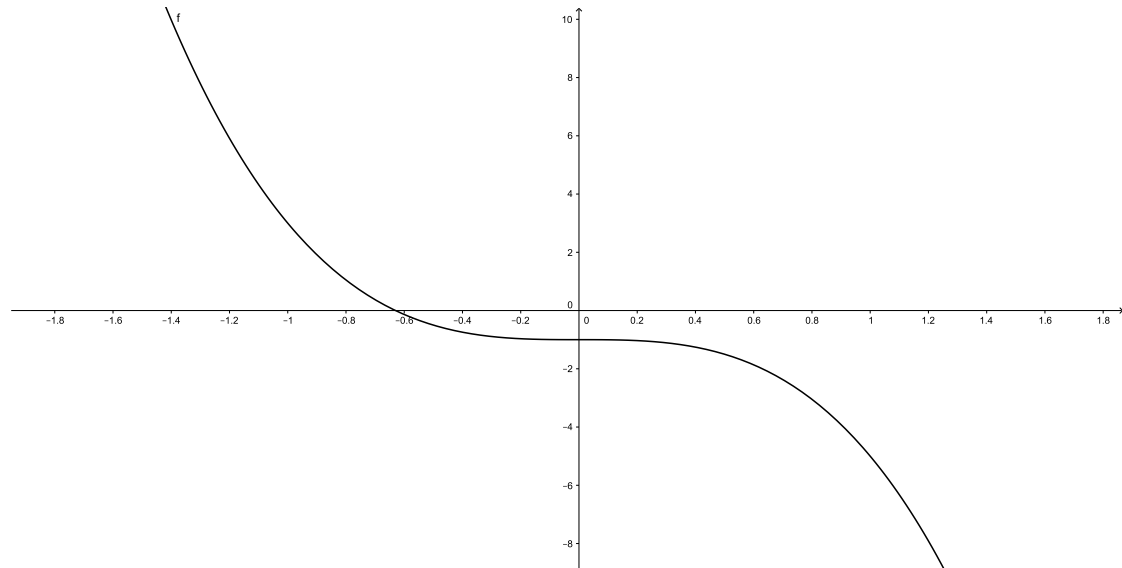
Wir untersuchen die Funktion  $f$  mit  $f(x) = -4x^3 - 1$  auf das Vorliegen eines Sattelpunktes und auf ihr Monotonieverhalten.

Wir bilden die 1. Ableitung der Funktion um etwaige Extrema zu finden. Es gilt  $f'(x) = -12x^2$ , also  $x = 0$  für  $f'(x) = 0$ . Nun müssen wir das Monotonieverhalten vor und nach besagter Stelle ( $x = 0$ ) betrachten. Wir sehen mittels  $x = -1$ , dass die Funktion mit  $f'(-1) = -12$  links davon streng monoton fallend ist und mit  $x = 1$ , dass die Funktion auch rechts mit  $f'(1) = -12$  streng monoton fallend ist. Die Funktion hält also vor und nach dem möglichen Extremum das gleiche Monotonieverhalten und somit

an der Stelle  $x = 0$  eine Sattelstelle.

Den eigentlichen Sattelpunkt erhält man sodann indem man die Sattelstelle in die Funktion  $f$  einsetzt. Weil  $f(0) = -1$  gilt, lautet der Sattelpunkt also  $S(0 | -1)$ .

Hier die Veranschaulichung der Funktion:



## Übung

Untersuche folgende Funktionen auf ihre Monotonie und überprüfe sie insbesondere auf Sattelpunkte:

1.  $f(x) = 3x^4 - 5x^3$
2.  $f(x) = x^2 - 4x + 4$

## Skizzieren von Funktionen anhand der Ableitung

### Theorie

Mithilfe der Extrempunkte (Extrema) sowie des ermittelten Monotonieverhaltens in den einzelnen Abschnitten der Funktion können wir diese auch skizzieren.

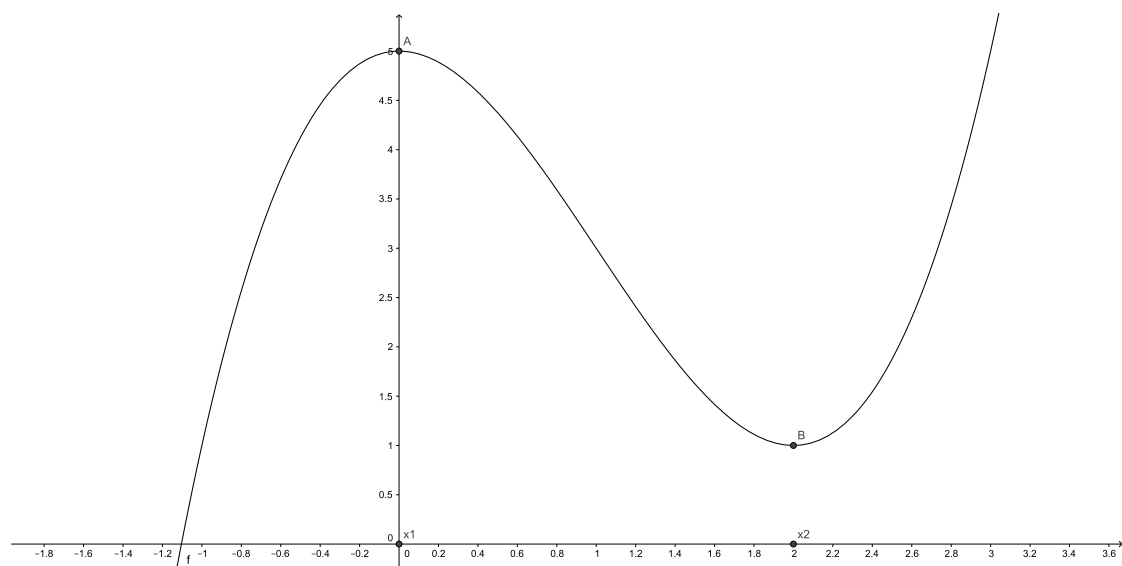
### Beispiel

Wir greifen auf das bereits bekannte Beispiel aus dem Kapitel zur *Untersuchung des Monotonieverhaltens einer Funktion* zurück. Die Funktionsgleichung zur Funktion  $f$  lautet:  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$

Wir wissen, dass die Funktion zwei Extrempunkte hat. Eine Extremstelle liegt bei  $x = 0$  und eine bei  $x = 2$  vor. Es gilt, dass  $f(0) = 5$  ist und  $f(2) = 1$  ist.

Ferner wissen wir, dass die Funktion im Intervall  $(-\infty; x_1]$  streng monoton steigend, im Intervall  $[x_1; x_2]$  streng monoton fallend und im Intervall  $[x_2; \infty)$  streng monoton steigend ist.

Die Skizze der Funktion sollte zirka so aussehen, wobei mit A und B die Extrema markiert wurden:



### Übung

Skizziere folgende Funktionen mithilfe der Informationen welche du aus der Monotonie, den Extrempunkten und Sattelpunkten gewonnen hast (die Beispiele entsprechen also den Beispielen der Kapitel davor):

1.  $f(x) = x^3 - 3x + 1$
2.  $f(x) = 2x^5 - 10x$
3.  $f(x) = 3x^4 - 5x^3$
4.  $f(x) = 2x^5 - 10x$

## Untersuchung des Monotonieverhaltens einer Funktion

### Theorie

Zu den uns bereits bekannten Definitionen von Monotonieverhalten ergänzen wir das Folgende:

### Definition

Eine Funktion  $f$  heißt auf einem Intervall  $I$ , wobei  $I$  eine Teilmenge des Definitionsbereiches der Funktion ist

- **streng monoton steigend**, wenn  $f'(x) > 0$  für alle  $x$  aus dem inneren Bereich von  $I$  ist, bzw.
- **streng monoton fallend**, wenn  $f'(x) < 0$  für alle  $x$  aus dem inneren Bereich von  $I$  ist.

### Schritt für Schritt zur Monotonie

Wie können wir nun rechnerisch feststellen, in welchen Intervallen unsere zu untersuchende Funktion (streng) monoton fallend oder (streng) monoton steigend ist?

**Schritt 1:** Hier müssen wir überprüfen, ob unsere Funktion überhaupt durchgehend definiert ist. Die Funktion  $f$  mit  $f(x) = 1/x$  ist beispielsweise in  $x = 0$  nicht definiert. Also müssen wir um diesen Punkt herum Intervalle bilden um die Funktion zu untersuchen (siehe dazu das 2. Beispiel). Ist die Funktion durchgehend definiert, so kann Schritt 1 übersprungen werden.

**Schritt 2:** Im nächsten Schritt versuchen wir die Extremstellen der Funktion zu finden. Diese erhalten wir, wie bereits bekannt, indem wir die 1. Ableitung der zu untersuchenden Funktion gleich 0 setzen. Wir berechnen also die Nullstellen der 1. Ableitung mittels  $f'(x) = 0$ . Aber warum interessieren uns gerade diese Stellen? Überlege kurz selbst! Im nächsten Absatz gibt es die Auflösung!

Die Idee hinter diesem Vorgehen ist, dass Extremstellen angeben wo sich das Monotonieverhalten der Funktion ändert, also z.B. wo es einen Übergang von streng monoton steigend zu streng monoton fallend gibt. Zwischen zwei Extremstellen hat eine Funktion dasselbe Monotonieverhalten, da eine Änderung des Monotonieverhaltens in einer weiteren Extremstelle im Intervall resultieren würde.

Abhängig davon ob wir Extremstellen gefunden haben oder nicht, gehen wir zu Schritt 3a (keine gefunden) oder zu Schritt 3b (welche gefunden) über.

**Schritt 3a:** Dies ist der einfachere Fall. Da es hier keine Extremstellen gibt, müssen wir die oben erwähnte Unterteilung in Intervalle nicht vornehmen. Wir suchen lediglich einen  $x$ -Wert aus dem Intervall und setzen diesen in die Ableitung der Funktion ein. Ist  $f'(x) > 0$ , so ist die Funktion  $f$  streng monoton wachend; ist  $f'(x) < 0$  so ist die Funktion  $f$  streng monoton fallend.

**Schritt 3b:** Hier haben wir ein wenig mehr zu tun. Wir müssen nun abhängig von der Anzahl der gefundenen Nullstellen die daraus resultierenden Intervalle untersuchen.

Betrachten wir zuerst jene zu untersuchenden Intervalle welche durch zwei Extremstellen begrenzt werden.

Bei jenen kann das Monotonieverhalten im zu untersuchenden Intervall der Funktion dadurch bestimmt werden, dass ein Punkt aus dem Inneren des Intervalls (also kein Randpunkt bzw. einer der beiden Extrempunkte) in  $f'$  eingesetzt wird. Ist  $f'(x) > 0$  so ist der Abschnitt der Funktion streng monoton steigend, andernfalls ist er streng monoton fallend.

Wollen wir das Monotonieverhalten am linken Rand der Funktion untersuchen, so setzen wir in  $f'$  einen Wert ein dessen x-Wert kleiner ist als jener des Extrempunktes welcher am weitesten links liegt. Ähnliches gilt für den rechten Rand der Funktion. Wir setzen in  $f'$  einen x-Wert ein, welcher größer ist als der x-Wert jenes Extrempunktes welcher am weitesten rechts liegt (sollte es nur einen Extrempunkt geben, handelt es sich bei dem Extrempunkt ganz links und ganz rechts um denselben Punkt). Als Resultat erhalten wir jeweils für die Ränder wieder  $f'(x) > 0$  oder  $f'(x) < 0$ , also streng monoton steigend bzw. streng monoton fallend.

## Beispiel

### 1. Beispiel

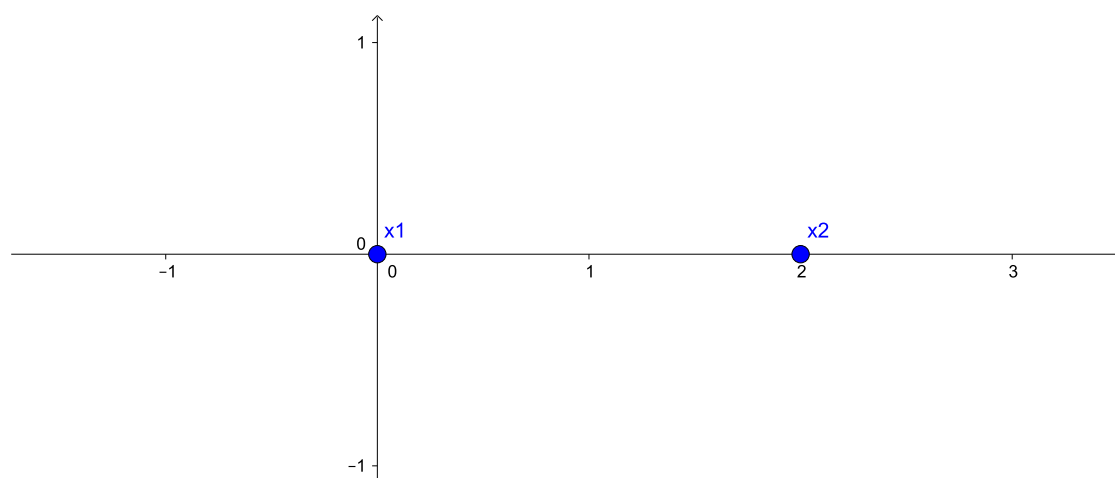
Folgende Funktion  $f$  sei gegeben und es ist zu untersuchen, wo diese Funktion welches Monotonieverhalten hat:  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$

Gehen wir schrittweise vor:

Schritt 1: Die Funktion ist durchgehend definiert.

Schritt 2: Berechnen wir nun die Extremstellen! Dazu leiten wir die Funktion  $f$  einmal ab und erhalten:  $f'(x) = 3x^2 - 6x$

Nun setzen wir  $f'(x) = 0$ , also  $3x^2 - 6x = 0$ . Mittels kleiner oder großer Lösungsformel erhalten wir sodann:  $x_1 = 0$  und  $x_2 = 2$ .



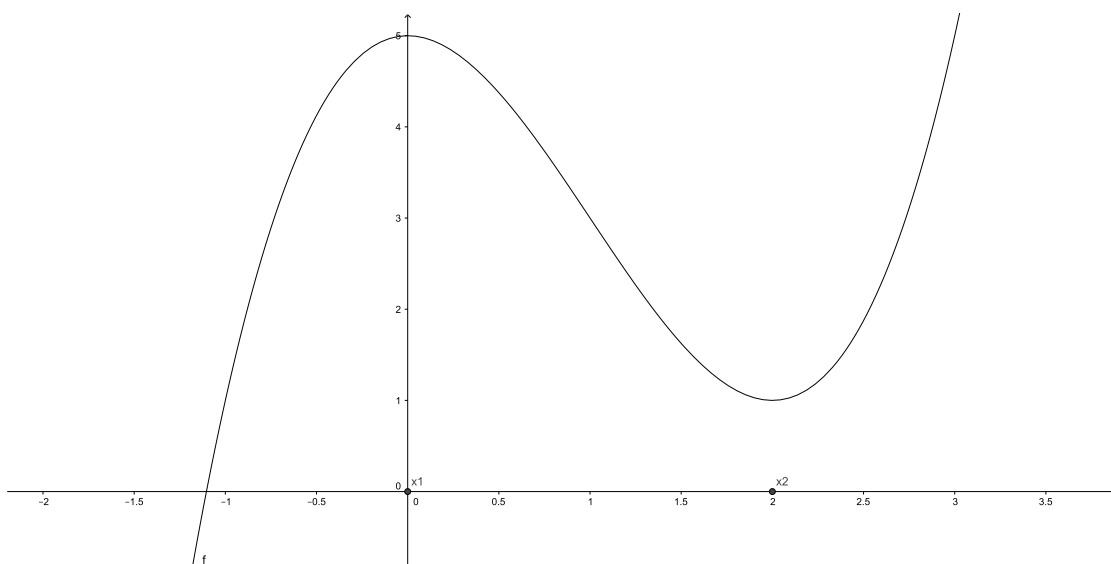
Also haben wir drei Intervalle die es zu untersuchen gilt:  $[-\infty; x_1]$ ,  $[x_1; x_2]$  und  $[x_2; \infty]$ .

**Schritt 3b:** Nachdem wir Extrema gefunden haben, müssen wir zu Schritt 3b wandern. Beginnen wir indem wir den Bereich links vom linken Extremwert untersuchen. Wir wählen einen Wert  $x < 0$ , also z.B.  $x = -1$ . Es gilt  $f'(-1) = 9$ , also ist die Funktion links von  $x_1$  streng monoton steigend.

Nun wählen wir einen Wert zwischen  $x_1$  und  $x_2$ . Dieser sei  $x = 1$ . Wir erhalten  $f(1) = -3$ , also ist die Funktion zwischen  $x_1$  und  $x_2$  streng monoton fallend.

Zu guter Letzt gilt es nun noch den Bereich rechts von  $x_2$  zu untersuchen. Wir wählen einen Wert  $x > 2$ , also z.B.  $x=3$ . Es gilt  $f(3) = 9$ , also ist die Funktion am rechten Rand streng monoton steigend.

Zur Veranschaulichung: die Funktion graphisch dargestellt. Wie man auf die graphische Darstellung kommt erfährst du im Kapitel *Skizzieren von Funktionen anhand der Ableitung*:



## 2. Beispiel

Folgende Funktion sei gegeben und es ist zu untersuchen, wo diese Funktion welches Monotonieverhalten hat:  $f(x) = 1/x$

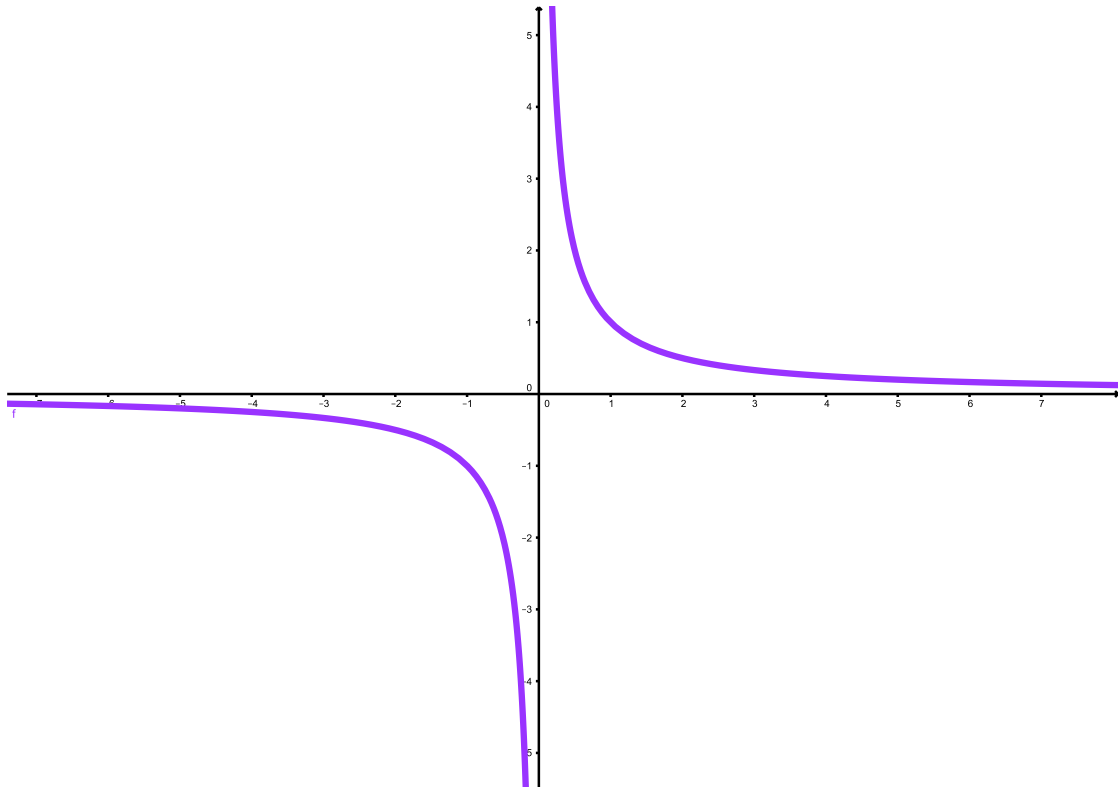
Schritt 1: Da eine Division durch 0 nicht erlaubt ist, müssen wir diese Stelle aus unserem Definitionsbereich ausnehmen. Die Intervalle welche wir also betrachten lauten:  $(-\infty; 0)$  und  $(0; \infty)$ .

Schritt 2: Nun gilt es die Extremstellen zu finden. Die Ableitung lautet:  $f'(x) = -1/x^2$ . Wenn wir  $-1/x^2 = 0$  setzen, sehen wir, dass unsere Funktion in keinem der beiden Intervalle Extremstellen besitzt. Wir springen also zu Schritt 3a.

Schritt 3a: Wir wählen einen Punkt aus dem linken Intervall. Jener soll an der Stelle  $x = -1$  sein. Wir erhalten  $f(-1) = -1$ , also ist die Funktion im Intervall  $(-\infty; 0)$  streng monoton fallend.

Wir wählen einen Punkt aus dem rechten Intervall. Jener soll sich an der Stelle  $x = 1$  befinden. Wir erhalten  $f(1) = 1$ , also ist die Funktion im Intervall  $(0; \infty)$  streng

monoton fallend.



## Übung

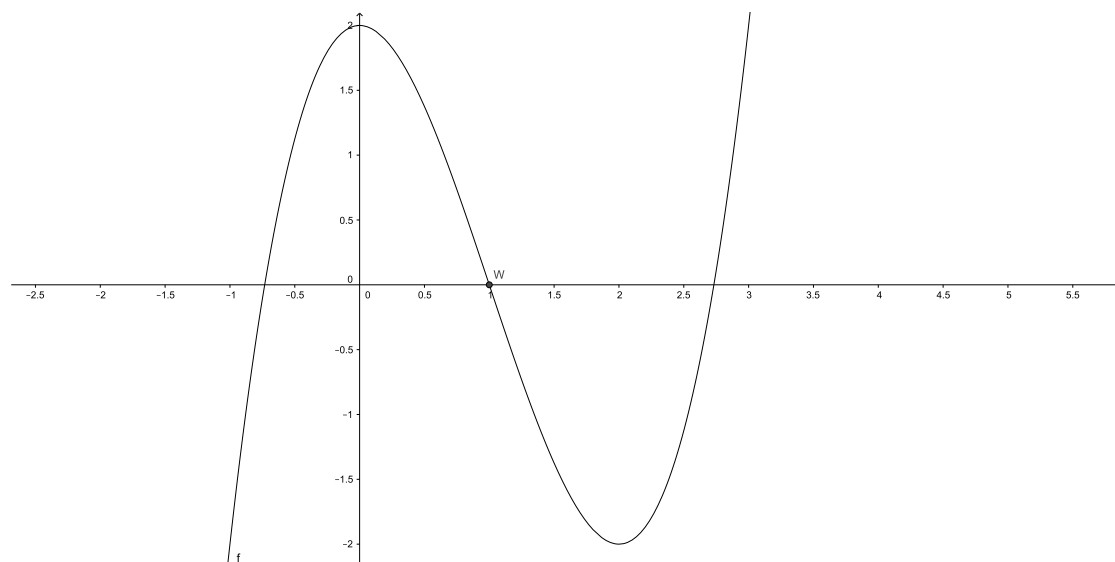
Gib an wo die folgenden Funktionen welches Monotonieverhalten aufweisen!

1.  $f(x) = 2x + 3$
2.  $f(x) = x^3 - 3x + 1$
3.  $f(x) = 1/x^2$
4.  $f(x) = 2x^5 - 10x$

## Wendepunkte

### Theorie

Im Wendepunkt ändert sich das Krümmungsverhalten eines Funktionsgraphen. Wir biegen beispielsweise von einer Rechtskurve in eine Linkskurve ein. Der Wendepunkt wird hier mit  $W$  bezeichnet:



### Definition

Es sei  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$  eine reelle Funktion. Eine Stelle  $x \in \mathbb{D}$  heißt **Wendestelle**, wenn die Funktion in dieser entweder:

- einen Übergang von **rechtsgeskrümmt** nach **linksgeskrümmt** oder
- einen Übergang von **linksgeskrümmt** nach **rechtsgeskrümmt**

hat. Der Punkt  $W(x|f(x))$  heißt sodann **Wendepunkt**. Die Tangente an den Graphen von  $f$  im Wendepunkt  $W$  heißt **Wendetangente**.

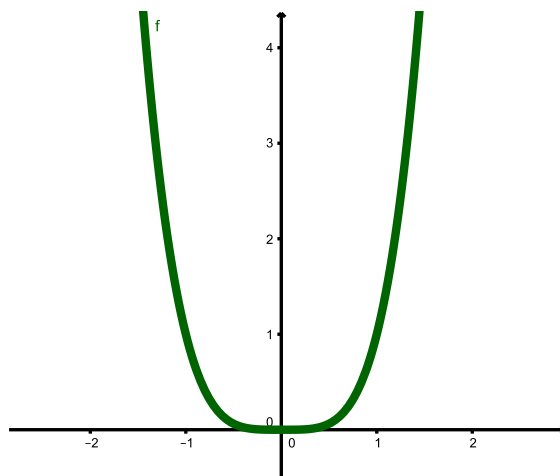
Wir wissen, dass  $f''(x) < 0$  bei einer Rechtskrümmung ist und  $f''(x) > 0$  bei einer Linkskrümmung ist. Folglich findet im Übergang zwischen Links- bzw. Rechtskrümmung ein Vorzeichenwechsel der zweiten Ableitung an dieser Stelle statt. Also gilt:

### Satz

Wenn bei einer Funktion  $f$  eine Wendestelle in  $x$  vorliegt, gilt  $f''(x) = 0$ .

Warum  $f''(x) = 0$  sein muss, wird uns klar, wenn wir folgende Überlegung anstellen: Die Wendestelle  $x$  von  $f$  ist jene Stelle, bei welcher die Steigung der Funktion am kleinsten oder am größten ist, also jener Punkt bei welchem die Ableitungsfunktion  $f'$  ein Extremum aufweist. Die Extrempunkte einer Funktion ermitteln wir durch die notwendige Bedingung, dass die Ableitung jener Funktion bei welcher wir die Extremwerte suchen gleich 0 sein muss. Was in unserem Fall bedeutet, dass wir die Ableitung der 1. Ableitung betrachten also  $f''(x) = 0$ .

Jedoch gilt nicht, dass wenn  $f''(x) = 0$  ist auch zwangsweise bei  $x$  eine Wendestelle vorliegt. Dies wird klar, wenn wir folgende Funktion  $f$  mit  $f(x) = x^4$  betrachten. Wir bilden nun die 2. Ableitung, also  $f''(x) = 12x^2$ . Als potenzielle Wendestelle würden wir  $x = 0$  erhalten. Jedoch handelt es sich bei  $x = 0$  um keine Wendestelle, was ersichtlich wird, wenn wir die Funktion betrachten:



Um sicherzustellen, dass tatsächlich eine Wendepunkt vorliegt, muss eine weitere Bedingung gelten und zwar, dass  $f'''(x) \neq 0$  ist. Wir formulieren wiederum folgenden Satz:

### Satz

Eine reelle Funktion  $f$  besitzt eine Wendestelle in  $x$ , wenn  $f''(x) = 0$  und  $f'''(x) \neq 0$  gelten.

### Beispiel

Wir untersuche folgende Funktion auf ihre Wendestellen und geben ferner die Wendetangente an diese Funktion an:  $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4$

Wir stellen zuerst alle benötigten Ableitungen auf:

$$f'(x) = 3x^2 + 6x$$

$$f''(x) = 6x + 6$$

$$f'''(x) = 6$$

Wir beginnen mit der notwendigen Bedingung für eine Wendestelle also, dass  $f''(x) = 0$  ist:

$6x + 6 = 0$ , dies gilt für  $x = -1$ . Also ist  $x = -1$  die einzige mögliche Wendestelle. Wir müssen diese nun weiter untersuchen. Es gilt  $f'''(-1) \neq 0$ , also handelt es sich bei  $x = -1$  um eine Wendestelle.

Da  $f(-1) = 6$  gilt, lautet der Wendepunkt  $W(-1|6)$ .

Wir stellen nun die Wendetangente auf: Die Gleichung der Wendetangente lautet:  $y = kx + d$ . Vom Wendepunkt sind uns  $x$  und  $y$  bereits bekannt. Die Steigung  $k$  im Punkt  $W$  können wir ermitteln indem wir die x-Koordinate des Punktes  $W$  in  $f'$  einsetzen. Wir erhalten also:  $f'(-1) = -3$ . Wir können nun die bekannten Werte in die Tangentengleichung einsetzen und die verbleibende Variable  $d$  berechnen:  $6 = (-3) * (-1) + d$ , also erhalten wir  $d = 3$  und somit die Wendetangentengleichung

$$y = -3x + 3$$

## Übung

Ermittle von folgenden Funktionen die Krümmungsbereiche, die Wendestellen und gib die Gleichungen der Wendetangenten an!

1.  $f(x) = x^3 - x - 1$
2.  $f(x) = x^4 + x^3 + 1$

## Quiz

[Zum Quiz](#)

## Zufallsvariable

### Theorie

Im Rahmen des Kapitels über relative Häufigkeiten haben wir als Beispiel den Wurf eines Würfels betrachtet. Beim Wurf des Würfels ergeben sich nun unterschiedliche Ausgänge. Man kann eine 1, eine 2, usw. würfeln. Im Rahmen von Zufallsvariablen möchten wir diese Ausgänge nun benennen. In unserem Fall ist dies recht einfach. Wir benennen jeden Ausgang entsprechend der Augenzahl des Würfels. So bezeichnen wir einen Wurf mit einer Augenzahl von 1 mit einer 1, einen Wurf mit einer Augenzahl von 2 mit einer 2 usw. Diese Bezeichnung muss jedoch nicht immer eine Zahl sein.

Stellen wir uns beispielsweise vor, wir wollen feststellen welches Geschlecht Personen im Rahmen einer Studie haben. So würde einem Ausfall des Zufallsversuchs, wenn wir mit einer weiblichen Personen zu tun haben der Variablenwert *weiblich* zugeordnet werden. Diese Werte können jedoch beispielsweise auch als Zahlen dargestellt werden. Wir könnten für *weiblich* eine 0 und für *männlich* eine 1 verwenden. Wir halten daher nun allgemein fest:

### Definition

Eine Zufallsvariable bildet Ausgänge eines Zufallsexperiments auf eine reelle Zahl ab.

Der Name Zufallsvariable kommt daher, dass ihr Wert vom Zufall abhängt. Zufallsvariablen werden stets mit einem Großbuchstaben bezeichnet, z.B.  $X$

### Arten von Zufallsvariablen

Wir unterscheiden zwischen stetigen und diskreten Zufallsvariablen. Bei einer diskreten Zufallsvariablen ist der Wertebereich der Zufallsvariablen  $X$  endlich. Als Beispiel kann hier der Wurf eines Würfels angesehen werden oder die Anzahl der SchülerInnen in deiner Schule.

Bei einer stetigen Zufallsvariable ist der Wertebereich unendlich. Die Zufallsvariable kann also einen beliebigen Wert aus einem Intervall annehmen. Betrachten wir beispielsweise Temperaturen als Intervall. So kann aus dem Intervall  $[0; 30]$  der Wert 1 aber auch der Wert 28,75 oder 27,54 angenommen werden. Im Rahmen dieses Kapitels werden wir uns nur mit diskreten Zufallsvariablen beschäftigen.

### Zufallsvariablen und Wahrscheinlichkeiten

Ein Wert  $x_i$  einer Zufallsvariablen  $X$  tritt mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit auf. Dabei wird jedem Wert  $x_i$  der Zufallsvariablen  $X$  eine Wahrscheinlichkeit zugeordnet. Man spricht sodann von einer sogenannten **Wahrscheinlichkeitsverteilung**.

Neben der Betrachtung, dass genau der Wert  $x_i$  seitens der Zufallsvariablen angenommen wird, können wir auch noch  $P(X < x_i)$  bzw.  $P(X \leq x_i)$  betrachten, also die Wahrscheinlichkeit, dass ein Wert kleiner oder kleiner gleich  $x_i$  angenommen wird. Des Weiteren können wir Gleiches auch noch für  $>$  und  $\geq$  analog betrachten. Auch kann ein Wert zwischen zwei Werten  $x_{i_1}$  und  $x_{i_2}$  betrachtet werden, wie in der Form  $P(x_{i_1} < X < x_{i_2})$ .

**Beispiel**

In einem Experiment würfeln wir mit zwei Würfeln. Gib an, mit welcher Wahrscheinlichkeit welche Augensummen angenommen werden. Was ist in diesem Kontext der Wert der Zufallsvariable? Ist die Zufallsvariable stetig oder diskret? Wir bezeichnen die Zufallsvariable mit  $X$ . Gib außerdem die folgenden Wahrscheinlichkeiten an:  $P(X = 12)$ ,  $P(X = 6)$ ,  $P(X \geq 2)$  und  $P(5 \leq X < 8)$ .

In unserem Kontext ist die erhaltene Augensumme der Wert der Zufallsvariablen. Beispielsweise ist beim Ausgang, dass wir mit einem Würfel eine 1 und mit dem anderen Würfel eine 2 erhalten, die Zufallsvariable 3. Die Zufallsvariable ist diskret, da der Wertebereich der Zufallsvariablen endlich ist (er besteht genauer gesagt aus allen natürlichen Zahlen von 2 bis 12).

Wir erhalten folgende Wahrscheinlichkeiten je Augensumme:

Augensumme	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Wahrscheinlichkeit	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

$P(X = 12) = \frac{1}{36}$ . Wir können diesen Wert direkt aus der Tabelle ablesen.

$P(X = 6) = \frac{5}{36}$ . Auch diesen Wert können wir direkt ablesen.

$P(X \geq 2) = 1$ . Hier könnten wir auch alle Wahrscheinlichkeiten aufsummieren, für deren Augenzahl gilt, dass sie größer oder gleich 2 ist. Jedoch können wir mit etwas Geschick durch Hinschauen erkennen, dass dies für alle Wahrscheinlichkeiten gilt und unser Wissen anwenden, dass die Summe aller Wahrscheinlichkeiten gleich 1 ist.

$P(5 \leq X < 8) = P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7) = \frac{4}{36} + \frac{5}{36} + \frac{6}{36} = \frac{15}{36}$ .

Wir erhalten also, dass die Augensumme mit einer Wahrscheinlichkeit von  $\frac{15}{36}$  größer gleich 5 und kleiner als 8 ist. Wir erhalten diesen Wert, indem wir die in der Betrachtung eingeschlossenen Augensummen aufsummieren.

**Übung**

Setze das Beispiel vom Kapitel über relative Häufigkeiten fort. Was ist in diesem Kontext der Wert der Zufallsvariable? Ist die Zufallsvariable stetig oder diskret? Gib die folgenden Wahrscheinlichkeiten an:  $P(X = 1)$ ,  $P(X = 5)$ ,  $P(X \geq 2)$  und  $P(1 \leq X < 5)$ .

## Komplexe Zahlen: Allgemeines

### Hintergrund

Der Zahlenbereich der reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  bietet nicht die Möglichkeit die Wurzel aus negativen Zahlen zu bilden. Wenn man beispielsweise versucht eine Lösung für die Gleichung

$$x^2 + 1 = 0$$

zu finden, so hat man in  $\mathbb{R}$  keine Chance, da das Quadrat einer jeden reellen Zahl größer oder gleich null ist. Daher führen wir ein neues Hilfsmittel, die sogenannte *imaginäre Einheit* mit dem Buchstaben  $i$  ein und notieren, dass Folgendes gilt:

$$i^2 = -1$$

Somit ist klar, dass  $i$  und auch  $-i$  die oben angeführte Gleichung lösen, da

$$i^2 + 1 = -1 + 1 = 0$$

$$(-i)^2 + 1 = ((-1) \cdot i)^2 + 1 = (-1)^2 \cdot i^2 + 1 = -1 + 1 = 0$$

gilt. Unter Verwendung der imaginären Einheit lässt sich nun ein neuer Zahlenbereich, jener der *komplexen Zahlen*  $\mathbb{C}$  einführen:

$$\mathbb{C} := \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

Anstelle der hier gegebenen Definition können komplexe Zahlen auch als Zahlenpaare geschrieben werden:

$$a + ib =: (a, b)$$

wobei  $a$  als *Realteil* und  $b$  als *Imaginärteil* bezeichnet wird. Beide Schreibweisen werden häufig genutzt.

### Rechenregeln

Die gewohnten Rechenoperationen sind auch mit komplexen Zahlen möglich:

#### Addition

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

*Beweis:*

$$(a, b) + (c, d) = (a + ib) + (c + id) = a + c + ib + id = (a + c) + i(b + d) = (a + c, b + d)$$

#### Subtraktion

$$(a, b) - (c, d) = (a - c, b - d)$$

*Beweis:*

$$(a, b) - (c, d) = (a + ib) - (c + id) = a - c + ib - id = (a - c) + i(b - d) = (a - c, b - d)$$

**Multiplikation**

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

*Beweis:*

$$\begin{aligned} (a, b) \cdot (c, d) &= (a + ib) \cdot (c + id) = ac + iad + ibc + \overbrace{i^2}^{-1} bd \\ &= ac - bd + iad + ibc = (ac - bd) + i(ad + bc) = (ac - bd, ad + bc) \end{aligned}$$

**Division** Wie in den reellen Zahlen ist auch in diesem Kontext die Division durch null verboten. Es gilt also

$$\frac{(a, b)}{(c, d)} = \left( \frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \right)$$

wenn  $c^2 + d^2 \neq 0$ .

Bei komplexen Brüchen versucht man stets reelle Nenner zu erhalten. Dabei wird der Bruch mit der *konjugiert komplexen Zahl*  $(c, -d)$  des Nenners  $(c, d)$  erweitert. Wie genau das gemeint ist, verrät der Beweis:

$$\begin{aligned} \frac{(a, b)}{(c, d)} &= \frac{(a, b) \cdot (c, -d)}{(c, d) \cdot (c, -d)} = \frac{(ac + bd, bc - ad)}{(c^2 + d^2, \underbrace{-cd + cd}_0)} = \frac{(ac + bd, bc - ad)}{c^2 + d^2} \\ &= \frac{(ac + bd) + i(bc - ad)}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i \cdot \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} = \left( \frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \right) \end{aligned}$$

Nach dem zweiten Gleichheitszeichen erhalten wir im Nenner eine komplexe Zahl mit Imaginärteil null, was einer reellen Zahl gleichkommt.

**Beispiel**

Gegeben sind zwei komplexe Zahlen  $x$  und  $y$  mit  $x = 3 - 5i$  bzw.  $y = 4 + i$ .  
Berechne  $x + y$ ,  $x - y$ ,  $x \cdot y$  und  $\frac{x}{y}$ .

**Lösung:**  $x = (3, -5)$  bzw.  $y = (4, 1)$ .

$$x + y = (3, -5) + (4, 1) = (3 + 4, -5 + 1) = (7, -4) = \underline{\underline{7 - 4i}}$$

$$x - y = (3, -5) - (4, 1) = (3 - 4, -5 - 1) = (-1, -6) = \underline{\underline{-1 - 6i}}$$

$$\begin{aligned} x \cdot y &= (3, -5) \cdot (4, 1) = (3 \cdot 4 - (-5) \cdot 1, 3 \cdot 1 + (-5) \cdot 4) \\ &= (12 + 5, 3 - 20) = (17, -17) = \underline{\underline{17 - 17i}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{x}{y} &= \frac{(3, -5)}{(4, 1)} = \left( \frac{3 \cdot 4 + (-5) \cdot 1}{4^2 + 1^2}, \frac{(-5) \cdot 4 - 3 \cdot 1}{4^2 + 1^2} \right) \\ &= \left( \frac{12 - 5}{16 + 1}, \frac{-20 - 3}{16 + 1} \right) = \left( \frac{7}{17}, \frac{-23}{17} \right) = \underline{\underline{\frac{7}{17} - \frac{23}{17}i}} \end{aligned}$$

Hier wurden durchwegs die zuvor hergeleiteten Rechenregeln in Verbindung mit der Darstellungsform in der Zahlenpaarschreibweise angewandt. Da diese Rechenregeln nicht unbedingt einprägsam sind, empfiehlt sich alternativ händisches Rechnen mit der Darstellungsform *Realteil*  $+i$ ·*Imaginärteil*, wie es in den Beweisen der Rechenregeln zu finden ist.

## Übungen

Berechne:

- 1)  $x + y$ ,  $x - y$ ,  $x \cdot y$  und  $\frac{x}{y}$ , wobei
  - i)  $x = 6 + 2i$  und  $y = 5 - 2i$
  - ii)  $x = -1 + i$  und  $y = 11 + 3i$
  - iii)  $x = -2 + 3i$  und  $y = -4i$
- 2)  $(3 + 9i)^2$
- 3)  $(\frac{2}{3} + \frac{7}{8}i) \cdot (\frac{1}{2} + \frac{7}{4}i) - (6 - \frac{9}{5}i)$

## Multiplikation komplexer Zahlen in Polardarstellung

### Theorie

Eine praktische Anwendung der Polardarstellung von komplexen Zahlen wird bei der Multiplikation in  $\mathbb{C}$  ersichtlich.

Bei komplexen Zahlen  $a = |a| \cdot (\cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha))$  und  $b = |b| \cdot (\cos(\beta) + i \cdot \sin(\beta))$  gilt:

$$a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot (\cos(\alpha + \beta) + i \cdot \sin(\alpha + \beta))$$

Interpretieren wir komplexe Zahlen wieder als Vektoren in der komplexen Zahlenebene, dann liefert die Multiplikation von zwei Vektoren nach dieser Formel, dass die eingeschlossene Winkel mit der positiven reellen Achse addiert und die Längen der einzelnen Vektoren multipliziert werden. Mit einem Beispiel sollte das klar werden.

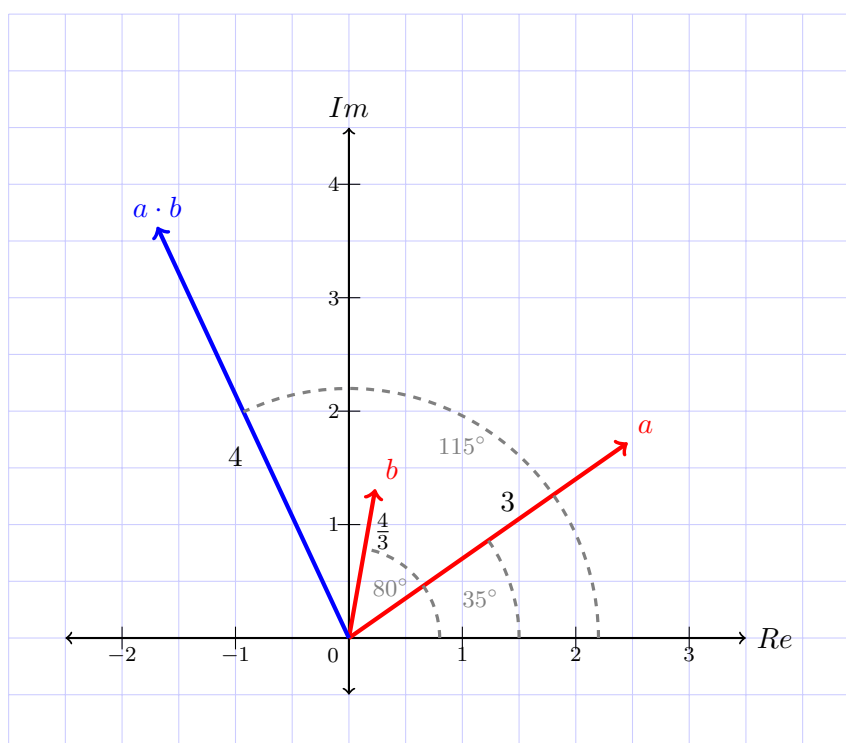
### Beispiel

Wir betrachten die komplexen Zahlen  $a = 3 \cdot (\cos(35^\circ) + i \cdot \sin(35^\circ))$  und  $b = \frac{4}{3} \cdot (\cos(80^\circ) + i \cdot \sin(80^\circ))$ . Wir werden nun  $a \cdot b$  genauer unter die Lupe nehmen.

Nach der eben angegebenen Formel ergibt sich:

$$a \cdot b = 3 \cdot \frac{4}{3} \cdot (\cos(35^\circ + 80^\circ) + i \cdot \sin(35^\circ + 80^\circ)) = 4 \cdot (\cos(115^\circ) + i \cdot \sin(115^\circ))$$

Gezeichnet sieht das so aus:



**Probe:** Sehen wir uns die Zahlen  $a$  und  $b$  in der gewohnten Schreibweise an:

$$a = 3 \cdot (\cos(35^\circ) + i \cdot \sin(35^\circ)) = 3 \cdot (0,819 + 0,574i) = 2,457 + 1,721i$$
$$\text{und } b = \frac{4}{3} \cdot (\cos(80^\circ) + i \cdot \sin(80^\circ)) = \frac{4}{3} \cdot (0,174 + 0,985i) = 0,232 + 1,313i$$

Demnach ist  $a = (2,457, 1,721)$  und  $b = (0,232, 1,313)$ . Die Rechenregel aus dem Einführungsteil zu den komplexen Zahlen liefert:

$$(2,457, 1,721) \cdot (0,232, 1,313) = (2,457 \cdot 0,232 - 1,721 \cdot 1,313, 2,457 \cdot 1,313 + 1,721 \cdot 0,232)$$
$$= (0,57 - 2,26, 3,226 + 0,4) = (-1,69, 3,625)$$

Nun müssen wir also noch überprüfen, ob  $-1,69 + 3,625i = 4 \cdot (\cos(115^\circ) + i \cdot \sin(115^\circ))$  gilt. Dafür wandeln wir  $c := -1,69 + 3,625i$  in die Polardarstellung  $c = |c| \cdot (\cos(\gamma) + i \cdot \sin(\gamma))$  um.

$$|c| = \sqrt{(-1,69)^2 + 3,625^2} = \sqrt{2,856 + 13,141} = \sqrt{16} = 4$$
$$\varphi' = \arctan\left(\frac{3,625}{-1,69}\right) = \arctan(-2,145) = -65^\circ$$

Weil sich  $c$  im zweiten Quadranten befindet, errechnet sich  $\varphi$  durch:

$$\varphi = 180^\circ + \varphi' = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ$$

Daraus kann man erkennen, dass die beiden Darstellungsformen übereinstimmen.

## Übung

Berechne  $a \cdot b$ :

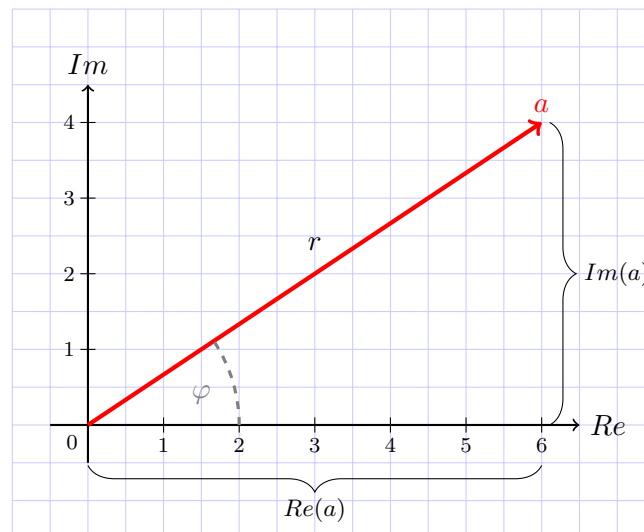
1)  $a = 4i$  und  $b = \frac{5}{4} \cdot (\cos(40^\circ) + i \cdot \sin(40^\circ))$

2)  $a = 2 \cdot (\cos(22^\circ) + i \cdot \sin(22^\circ))$  und  $b = 1,3 \cdot (\cos(60^\circ) + i \cdot \sin(60^\circ))$

## Polardarstellung komplexer Zahlen

### Theorie

Im vorherigen Kapitel wurde beschrieben, wie komplexe Zahlen als Vektoren interpretiert werden können. Die Angabe des Real- und Imaginärteils macht den Vektor und die komplexe Zahl eindeutig. Eine weitere Möglichkeit, wie eine komplexe Zahl angegeben werden kann ist durch Ermittlung des Winkels, den der Vektor mit der positiven reellen Achse einschließt, und der Bestimmung dessen genauer Länge.



Aus dieser Zeichnung müssen also  $r$  und  $\varphi$  bestimmt werden, wobei  $r$  (was übrigens auch als der *Betrag* von  $a$  – geschrieben  $|a|$  – bezeichnet wird) problemlos mit dem *Lehrsatz des Pythagoras* bestimmt werden kann:

$$r^2 = \operatorname{Im}(a)^2 + \operatorname{Re}(a)^2,$$

also gilt  $r = \sqrt{\operatorname{Im}(a)^2 + \operatorname{Re}(a)^2}$

Außerdem sollte von den Winkelfunktionen bekannt sein, dass sich der Tangens des Winkels  $\varphi$  aus dem Quotienten von Imaginär- und Realteil von  $a$  errechnen lässt. Daraus folgt weiter falls  $\operatorname{Re}(a) \neq 0$ :

$$\tan(\varphi) = \frac{\operatorname{Im}(a)}{\operatorname{Re}(a)}$$

also gilt  $\varphi = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(a)}{\operatorname{Re}(a)}\right)$

Hier muss jedoch darauf geachtet werden die Winkel, entsprechend den Regeln der Trigonometrie, in die jeweiligen vier Quadranten einzuteilen und darüber hinaus dafür zu sorgen, dass  $\varphi \in [0^\circ; 360^\circ)$  ist. So würden beispielsweise komplexe Zahlen im ersten und dritten Quadranten aufgrund der jeweils gleichen Vorzeichen von Real- und Imaginärteil bei blanker Berechnung den gleichen Winkel liefern, welcher noch hinterfragt werden muss.

Durch weitere Anwendung grundlegender Trigonometrie erhalten wir das Folgende:

$$\sin(\varphi) = \frac{\operatorname{Im}(a)}{r} \quad \text{und} \quad \cos(\varphi) = \frac{\operatorname{Re}(a)}{r},$$

weshalb  $\operatorname{Im}(a) = r \cdot \sin(\varphi)$  und  $\operatorname{Re}(a) = r \cdot \cos(\varphi)$  gelten

Da für die komplexe Zahl  $a = \operatorname{Re}(a) + i \cdot \operatorname{Im}(a)$  gilt, erhält man durch Einsetzen des eben Ermittelten die gesuchte Polardarstellung:

$$a = \operatorname{Re}(a) + i \cdot \operatorname{Im}(a) = r \cdot \cos(\varphi) + i \cdot r \cdot \sin(\varphi) = r \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$$

### Beispiel

Gegeben ist die komplexe Zahl  $4 - 3i$ , welche in Polardarstellung umgewandelt werden soll.

### Lösung:

$$r = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

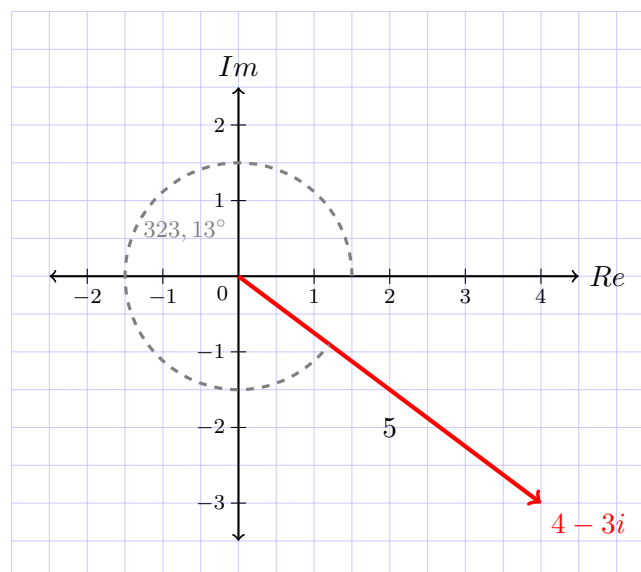
$$\varphi' = \arctan\left(\frac{-3}{4}\right) = -36,87^\circ$$

$$\text{für } \varphi \in [0^\circ; 360^\circ) : \varphi = \varphi' + 360^\circ = 323,13^\circ$$

Die erhaltenen Werte  $r = 5$  und  $\varphi = 323,13^\circ$  können direkt in die allgemeine Form der Polardarstellung eingesetzt werden und wir erhalten als finale Lösung:

$$4 - 3i = 5 \cdot (\cos(323,13^\circ) + i \cdot \sin(323,13^\circ))$$

Die folgende Zeichnung bestätigt dieses Resultat:



## Übung

Wandle die folgenden komplexen Zahlen in deren Polardarstellung um:

1)  $6 + 2i$

2)  $-4 + i$

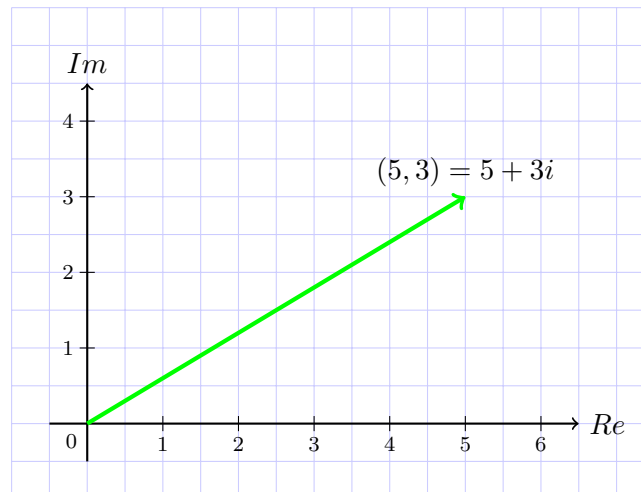
3)  $-1 - 3i$

4)  $5 - \frac{i}{4}$

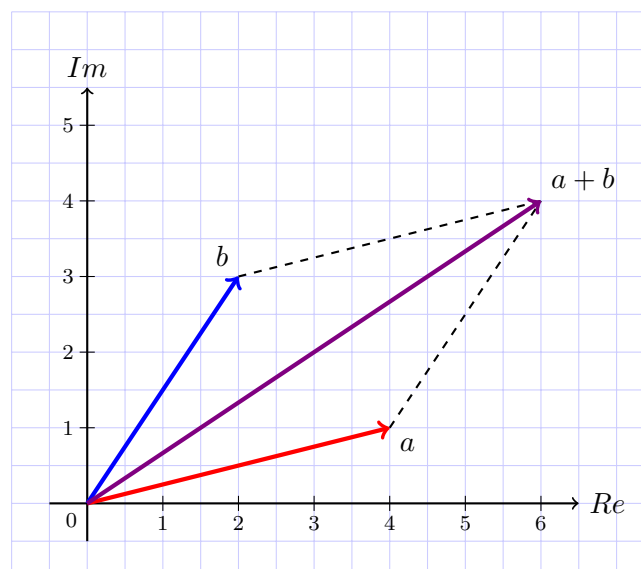
## Geometrische Deutung komplexer Zahlen

### Theorie

Komplexe Zahlen können geometrisch praktisch gedeutet werden. Man spricht dabei von der *komplexen Zahlenebene*, welche einem Koordinatensystem entspricht. Die x-Achse steht hier für den Realteil und die y-Achse für den Imaginärteil der zu zeichnenden Zahl. So würde die Zahl  $5 + 3i$  – in der im einführenden Kapitel in die komplexen Zahlen erläuterten Zahlenpaarschreibweise  $(5, 3)$  – in der komplexen Zahlenebene so aussehen:



Wie hier ersichtlich, können komplexe Zahlen demnach als Vektoren interpretiert werden. Das kommt uns vor allem bei den Rechenoperationen der Addition und Subtraktion zugute. Für diese kann einfach die bereits bekannte Vektoraddition herangezogen werden.

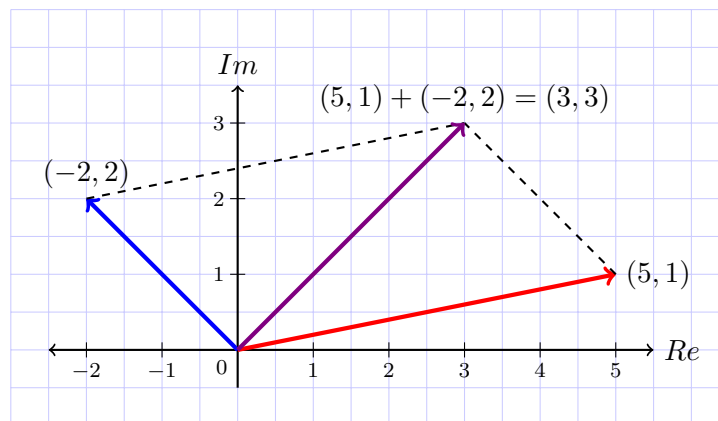


**Beispiel**

Als Rechenbeispiel wollen wir die komplexen Zahlen  $5+i$  und  $-2+2i$  addieren. Rechnerisch wissen wir bereits, wie das gelöst werden kann.

$$(5, 1) + (-2, 2) = (3, 3)$$

Bei Vorstellung dieser Zahlenpaare, welche jeweils komplexen Zahlen entsprechen, als Vektoren sehen wir in der komplexen Zahlenebenen, dass eine Addition von Vektoren genau dasselbe liefert.



Somit kann man auch mithilfe von Vektoren einfache Additionen und Subtraktionen von komplexen Zahlen durchführen.

**Übung**

Löse  $a + b$  und  $a - b$  für die folgenden Paare von komplexen Zahlen zeichnerisch, indem du sie als Vektoren auffasst:

- 1)  $a = -i$  und  $b = 4 + 2i$
- 2)  $a = 6 - 4i$  und  $b = 2 + -3i$
- 3)  $a = \frac{2}{3} - \frac{1}{4}i$  und  $b = 2 + \frac{3}{5}i$

## Lösen quadratischer Gleichungen in $\mathbb{C}$

An dieser Stelle wird der gewohnte Ablauf umgekehrt: wir beginnen mit einem einführenden Beispiel und werden anhand der Lösung herausfinden, wie Gleichungen – im Speziellen solche, die keine reellen Lösungen besitzen – gelöst werden können.

Dafür müssen wir allerdings folgende Vereinbarung treffen:

### Definition

Für  $x \in \mathbb{R}^+$  gilt:  $\sqrt{-x} = |\sqrt{x}|i$ .

Das wird an dieser Stelle notwendig, da wir von Quadratwurzeln von positiven reellen Zahlen gewohnt sind, dass diese zwei Lösungen besitzen. Um für Eindeutigkeit zu sorgen, werden in diesem Kontext allerdings nur die positiven Wurzeln herangezogen.

Somit wäre beispielsweise  $\sqrt{-4}$  nicht  $\pm 2i$ , sondern  $2i$ . Genauso kann hiermit festgelegt werden:

$$\sqrt{-1} = i$$

### Einführendes Beispiel

Gegeben sei eine Funktion  $f$  mit der Funktionsgleichung  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 5$ . Berechne die (komplexen) Nullstellen dieser Funktion!

**Lösung:** Wir verwenden die übliche Formel zur Bestimmung der Nullstellen einer quadratischen Funktion  $ax^2 + bx + c$ :

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Für unseren Fall würden die Lösungen folgendermaßen aussehen:

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5}}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 1 \pm \sqrt{-9} = 1 \pm 3i$$

Nachdem die Lösungen negative Wurzeln enthalten, existieren keine Lösungen in  $\mathbb{R}$ ; sehr wohl aber in  $\mathbb{C}$ .

Wir erhalten also die zueinander komplex konjugierten Lösungen  $x_1 = 1 + 3i$  und  $x_2 = 1 - 3i$ .

**Probe:** Um festzustellen, ob die erhaltenen Lösungen tatsächlich stimmen, werden wir sie in die Funktionsgleichung einsetzen und hoffen auf Bestätigung, dass es sich dabei um Nullstellen handelt.

$$\begin{aligned} f(x_1) &= \frac{1}{2}x_1^2 - x_1 + 5 = \frac{1}{2}(1 + 3i)^2 - (1 + 3i) + 5 = \frac{1}{2}(1 + 3i)(1 + 3i) - 1 - 3i + 5 \\ &= \frac{1}{2}(-8 + 6i) + 4 - 3i = -4 + 3i + 4 - 3i = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x_2) &= \frac{1}{2}x_2^2 - x_2 + 5 = \frac{1}{2}(1 - 3i)^2 - (1 - 3i) + 5 = \frac{1}{2}(1 - 3i)(1 - 3i) - 1 + 3i + 5 \\ &= \frac{1}{2}(-8 - 6i) + 4 + 3i = -4 - 3i + 4 + 3i = 0 \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass die gefundenen Lösungen korrekt sind.

**Probe (anderer Ansatz):** Genauso gut hätte auch gezeigt werden können, dass  $f(x) = \frac{1}{2}(x - x_1)(x - x_2)$  gilt. Der Faktor  $\frac{1}{2}$  steht deshalb dabei, weil es sich beim Polynom  $f(x)$  um ein nicht-normiertes handelt; das heißt, dass vor dem Glied mit der höchsten Potenz nicht der Faktor 1 steht. Eine Division durch den zum höchsten Glied gehörenden Faktor würde ein normiertes Polynom liefern, welches die gleichen Nullstellen besitzt. Daher muss genau dieser Faktor bei der Linearfaktorzerlegung (genau darum handelt es sich bei dieser zweiten Probe) berücksichtigt werden.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(x - x_1)(x - x_2) &= \frac{1}{2}(x - (1 + 3i))(x - (1 - 3i)) \\ &= \frac{x^2 - x(1 - 3i) - x(1 + 3i) + (1 + 3i)(1 - 3i)}{2} \\ &= \frac{x^2 - x + 3ix - x - 3ix + 1 + 9}{2} \\ &= \frac{x^2 - 2x + 10}{2} = \frac{1}{2}x^2 - x + 5 = f(x) \end{aligned}$$

Demnach können wir sicher sein, dass wir die richtigen Lösungen erhalten haben.

## Theorie

Anhand des gegebenen Beispiels sollte die allgemeine Vorgehensweise bereits ersichtlich sein: im Prinzip läuft alles wie gewohnt ab, bis zu dem Punkt, an dem negative Wurzeln ins Spiel kommen.

Ein Polynom zweiten Grades (also mit 2 als höchste Potenz)  $ax^2 + bx + c$  liefert die Nullstelle(n):

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

wobei  $\left\{ \begin{array}{l} \text{zwei reelle Nullstellen existieren} \\ \text{eine reelle Nullstelle existiert} \\ \text{zwei komplexe Nullstellen existieren} \end{array} \right\}$  wenn  $\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{b^2 - 4ac} > 0 \\ \sqrt{b^2 - 4ac} = 0 \\ \sqrt{b^2 - 4ac} < 0 \end{array} \right\}$  gilt.

Für die Auswertung in dem Fall, welcher zwei komplexe Nullstellen liefert, benötigen wir die am Beginn dieses Kapitels angeführte Definition. So wird aus der Wurzel einer negativen Zahl die imaginäre Einheit  $i$  mal der positiven Wurzel der mit  $-1$  multiplizierten Zahl. Danach muss nur noch ausgerechnet werden und du solltest auf die richtige Lösung kommen.

Spannend ist noch zu bemerken, dass der Fall, der zwei Lösungen im Komplexen besitzt, jeweils genau zueinander konjugiert komplexe Zahlen als Lösungen liefert.

Als Probe kannst du die gefundenen Nullstellen einfach durch Einsetzen überprüfen oder bei einer Linearfaktorzerlegung prüfen, ob für ein gegebenes Polynom  $f(x) = a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$  tatsächlich  $f(x) = a_2(x - x_1)(x - x_2)$  gilt, wobei  $x_1$  und  $x_2$  für die ermittelten Nullstellen stehen.

Davon abgesehen sei erwähnt, dass jede Polynomfunktion (es sei denn, sie ist konstant) komplexe Nullstellen besitzt.

**Übung**

Ermittle die Lösungen dieser Gleichungen:

1)  $4x^2 + 1 = 3x$

2)  $-2x^2 = 3$

3)  $x^2 + x + 2 = 0$

## Die imaginäre Einheit

### Theorie

In diesem Dokument werden einige interessante Eigenschaften der imaginären Einheit  $i$  besprochen.

### Periodizität der Potenzen von $i$

Zuallererst betrachten wir einige Potenzen von  $i$  und werden ein Muster erkennen.

$$\begin{aligned}
 & \vdots \\
 i^{-4} &= \frac{1}{i^4} = \frac{1}{(i^2)^2} = \frac{1}{(-1)^2} = \frac{1}{1} = 1 \\
 i^{-3} &= \frac{1}{i^3} = \frac{1}{-i} = \frac{1 \cdot i}{(-i) \cdot i} = \frac{i}{-(i^2)} = \frac{i}{1} = i \\
 i^{-2} &= \frac{1}{i^2} = \frac{1}{-1} = -1 \\
 i^{-1} &= \frac{1}{i} = \frac{1 \cdot (-i)}{i \cdot (-i)} = \frac{-i}{-(i^2)} = \frac{-i}{1} = -i \\
 i^0 &= 1 \\
 i^1 &= i \\
 i^2 &= -1 \\
 i^3 &= i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i \\
 i^4 &= i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1 \\
 & \vdots
 \end{aligned}$$

Daraus lässt sich vermuten, dass alle Potenzen von  $i$  mit ganzen Zahlen in einem Element der Menge  $\{1, i, -1, -i\}$  resultieren. Klarer wird das durch die Betrachtung, dass für alle Zahlen  $n \in \mathbb{Z}$

$$i^{4n} = (i^4)^n = 1^n = 1$$

gilt. Mithilfe der üblichen Rechenregeln für Potenzen können wir nun beweisen, dass alle ganzzahligen Potenzen von  $i$  tatsächlich ein Element der Menge  $\{1, i, -1, -i\}$  ergeben.

Bei Hochzahlen  $k$ , welche durch 4 teilbar sind, gilt  $i^k = 1$  wegen  $i^{4n} = 1$ . Solche Exponenten, die bei Division durch 4 den Rest 1 besitzen, können in der Form  $4n + 1$  geschrieben werden.

$$i^{4n+1} = i^{4n} \cdot i^1 = 1 \cdot i = i$$

Ganze Zahlen, welche bei Division durch 4 den Rest 2 besitzen, können als  $4n + 2$  dargestellt werden.

$$i^{4n+2} = i^{4n} \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$$

Der letzte Fall, Exponenten deren Division durch 4 den Rest 3 liefern, besitzen die Form  $4n + 3$ .

$$i^{4n+3} = i^{4n} \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i$$

Da somit alle möglichen Fälle von ganzen Zahlen abgedeckt werden, wurde dadurch bewiesen, dass die Potenzierung der imaginären Einheit periodisch ist.

**Beispiel**

1. Berechne  $i^{2016}$
2. Berechne  $i^{-2016}$
3. Berechne  $i^n$  für alle  $n \in \{n < 20 \mid n \text{ ist eine Primzahl}\}$